МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНИКА»

ФАКУЛЬТЕТ ПРИРОДНИЧИХ НАУК ТА ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра прикладної математики

О.О. Сдвижкова, Д.В. Бабець, С.Є. Тимченко, А.Г. Шпорта

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Методичні рекомендації до практичних занять
з дисципліни «Математичний аналіз» для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 113 «Прикладна математика»

Дніпро
НТУ «ДП»
2024

Сдвижкова О.О.

Невизначений інтеграл. Методи інтегрування : методичні рекомендації до практичних занять з дисципліни «Математичний аналіз» для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 «Прикладна математика» / О.О. Сдвижкова, Д.В. Бабець, С.Є. Тимченко, А.Г. Шпорта ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2024. – 65 с.

Автори:
О.О. Сдвижкова д-р техн. наук, проф.
Д.В. Бабець, д-р техн. наук, проф.
С.Є. Тимченко, канд. техн. наук, доц.
А.Г. Шпорта, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Затверджено науково-методичною комісією спеціальності 113 «Прикладна математика» (протокол № 01/24 від 20.01.2024) за поданням кафедри прикладної математики (протокол №01/24 від 17.01.2024)

Дані методичні рекомендації до практичних занять містять відомості з теорії, вказівки до розв’язання задач відповідного типу, розібрані контрольні приклади, завдання з відповідями для самостійної роботи студентів, а також варіанти індивідуальних завдань з кожного розглянутого розділу.

Відповідальна за випуск завідувачка кафедри прикладної математики О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф.

Вступ

Дані методичні вказівки призначено для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 «Прикладна математика», з дисципліни «Математичний аналіз». Вони також можуть бути рекомендовані для студентів перших курсів технічних закладів вищої освіти всіх форм навчання та науково-педагогічних працівників, які викладають курс вищої математики, зокрема, у дистанційному форматі.

Мета даної методичної розробки надати студентам істотну допомогу при вивченні розділу «Невизначений інтеграл». Структура цієї роботи складається з теоретичного матеріалу з кожної окремої теми розділу, розібраних прикладів і індивідуальних завдань з них. Всі теоретичні викладки містять ретельні пояснення, доведення та супроводжуються характерними прикладами. Методичні вказівки містять велику кількість розібраних задач. З кожної теми є індивідуальні завдання для перевірки успішності у випадку дистанційної роботи.

Ці методичні вказівки підготовлені з метою підвищення якості навчання студентів і містять елементи теорії, завдання, методичні вказівки, власне, розв'язання задач, та завдання для самостійного розв'язання. Весь матеріал розбитий на параграфи, кожен з яких присвячений окремій темі та має розібрані приклади. Наприкінці розділу наведено завдання для самостійної роботи.

§ 1. Первісна та невизначений інтеграл

1. ***Поняття первісної***. Функцію $F(x)$ називають **первісною** для функції $f(x)$ на деякому проміжку X, якщо

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X. \tag{1}$$

Очевидно, що означення (1) має сенс, тільки коли функція $F(x)$ диференційовна на проміжку X.

Приклад 1.

а) $f(x) = 2x$. Первісною для функції $f(x)$ в області $X = (-\infty, \infty)$ є функція $F(x) = x^2$. Дійсно, $F'(x) = \left(x^2\right)' = 2x = f(x) \quad \forall x \in X$;

б) $f(x) = \sin 3x$. Тут також нескладно підібрати функцію $F(x)$, що задовольняє

рівність (1): $F(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x$, $x \in X = (-\infty, \infty)$. Справді, $F'(x) = \left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)' =$

$= -\frac{1}{3}(-3\sin 3x) = \sin 3x = f(x) \quad \forall x \in$ X.

Оскільки похідна сталої $C' = 0$, то додавання до функції $F(x)$ будь-якого сталого доданку не порушує рівність (1): $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$. Окрім $F(x) = x^2$ для функції $f(x) = 2x$ первісними будуть також $F_1(x) = x^2 + 1$, $F_2(x) = x^2 - 3$ та нескінченна множина інших функцій вигляду $F(x) + C$.

Знаходження первісної для даної функції $f(x)$ без якихось додаткових умов завжди неоднозначно. Якщо функція $f(x)$ має на проміжку X первісну $F(x)$, то вона має там також і нескінченну множину інших первісних вигляду $F(x) + C$, де $C = const$. Виявляється, що первісних відмінного вигляду на тому ж проміжку X функція $f(x)$ мати не може.

2. ***Невизначений інтеграл***. Усю множину первісних функції $f(x)$ на проміжку X називають її **невизначеним інтегралом** на цьому проміжку. Якщо $F(x)$ – яка-небудь первісна для функції $f(x)$ на X, то вся множина первісних для $f(x)$ на проміжку X подається виразом $F(x) + C$, де C – довільна стала. Це і є невизначений інтеграл. Записують

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{2}$$

Тут $f(x)$ – підінтегральна функція; $f(x)dx$ – підінтегральний вираз; x – змінна інтегрування; $\int$ – знак інтеграла.

Наприклад, $\int 2x\,dx = x^2 + C$.

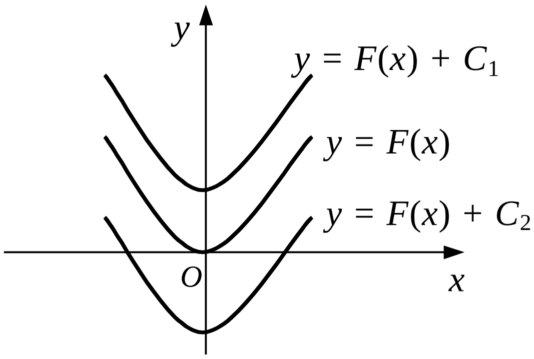

Рис. 1

При фіксованому C рівність

$$y = F(x) + C$$

визначає деяку криву. Із зміненням C ця крива (її називають інтегральною кривою) зміщується вздовж осі Oy. Отже, геометрично множина первісних – це сім`я інтегральних кривих, що відрізняються одна від одної зміщенням по осі Oy (рис. 1).

3. ***Властивості невизначеного інтеграла***. Через означення (1) та (2) справедливі такі твердження.

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, а диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \qquad d\int f(x)dx = f(x)dx. \tag{3}$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої:

$$\int dF(x) = F(x) + C. \tag{4}$$

3. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла. Якщо $A = const \neq 0$, то

$$\int A f(x)dx = A\int f(x)dx. \tag{5}$$

отже, обидві частини співвідношення (5) являють собою множину первісних для однієї й тієї ж функції $A\,f(x)$. Саме це й стверджує рівність (5).

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від доданків:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx. \tag{6}$$

5. Нехай на одному й тому ж проміжку $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = u(x)$ – довільна неперервно диференційовна функція. Тоді

$$\int f[u(x)]du(x) = F[u(x)] + C. \tag{7}$$

Зокрема, при $u = ax + b$, де a та b – сталі, маємо

$$\int f(ax+b)d(ax+b) = F(ax+b) + C \qquad \text{або}$$

$$a\int f(ax+b)dx = F(ax+b) + C.$$

Отже, якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C . \qquad (8)$$

Приклад 2.

а) $\int sin\, x\, dx = -cos\, x + C \quad \Rightarrow \quad \int sin(3x+1)dx = -\frac{1}{3}cos(3x+1) + C$;

б) $\int e^x dx = e^x + C \quad \Rightarrow \quad \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$.

4. ***Таблиця основних інтегралів***. На основі означень (1), (2) та наведених вище властивостей складають таблиці невизначених інтегралів. Математичні довідники містять декілька сотень формул. Згідно з (3) справедливість цих формул можна перевірити диференціюванням.

ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. $\int du = u + C$	**8**. $\int ctgu\, du = ln\lvert sin\, u\rvert + C$
2. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \ \alpha \neq -1$	**9**. $\int \frac{du}{cos^2 u} = \int sec^2 u\, du = tgu + C$
2*а*. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	**10**. $\int \frac{du}{sin^2 u} = \int cos\, ec^2 u\, du = -ctgu + C$
2*б*. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	**11**. $\int \frac{du}{sin\, u} = ln\left\lvert tg\frac{u}{2}\right\rvert + C$
3. $\int \frac{du}{u} = ln\lvert u\rvert + C$	**12**. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
4. $\int a^u\, du = \frac{a^u}{ln\, a} + C$	**13**. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C$
4*а*. $\int e^u\, du = e^u + C$	**14**. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$
5. $\int sin\, u\, du = -cos\, u + C$	**15**. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + C$
6. $\int cos\, u\, du = sin\, u + C$	**16**. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + C$

7. $\int tgu\,du = -ln\left|\cos u\right| + C$	**17.** $\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$

Індивідуальне завдання 1

варіант 1

$\int (x+1)^2\,dx$	$\int \left(x^2 + 2\cos x + e^x\right)dx$	$\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{3x}\,dx$
$\int \left(\frac{2}{\sqrt{16-x^2}} + \frac{5}{\cos^2 x}\right)dx$	$\int \left(\frac{7}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$	$\int \left((\sqrt[5]{x}+1)^2 - \frac{5^x}{3}\right)dx$
$\int \left(5\sqrt[3]{x^2} + 2ctgx + \frac{1}{3x}\right)dx$	$\int \left(\frac{5}{x^3} + \frac{7}{5+x^2}\right)dx$	$\int \left(5\sin x - \frac{3}{x}\right)dx$

варіант 2

$\int (2x-1)^2\,dx$	$\int \left(x^3 + 3\cos x + 2^x\right)dx$	$\int \frac{(\sqrt{x}-3)^2}{2x^2}\,dx$
$\int \left(\frac{5}{x^2} - \frac{3}{\sqrt{5-x^2}}\right)dx$	$\int \left(\frac{3}{4+x^2} - \frac{e^x}{2}\right)dx$	$\int \left(4\cos x + \frac{2}{x}\right)dx$
$\int \left(\frac{3}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$	$\int \left(\frac{2}{\sqrt[4]{x}} - \sqrt{x} + \frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$	$\int \left(\frac{3}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{tgx}{2}\right)dx$

варіант 3

$\int (2-3x)^2\,dx$	$\int \left(3x - 2\cos x + 4^x\right)dx$	$\int \frac{(\sqrt[3]{x}+5)^2}{2x}\,dx$
$\int \left(\frac{4}{x} - \frac{3}{\sqrt{16-x^2}}\right)dx$	$\int \left(\frac{1}{3+x^2} - \frac{e^x}{2}\right)dx$	$\int \left(2tgx - \frac{7}{\sqrt{x}}\right)dx$
$\int \left(\frac{2}{\sqrt{4+x^2}} + \frac{4}{\sin^2 x}\right)dx$	$\int \left(\frac{2}{\sqrt[4]{x}} - 4x - \frac{1}{2\cos^2 x}\right)dx$	$\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x} - \frac{1}{2\cos x}\right)dx$

варіант 4

$\int (1+3x)^2 dx$	$\int \left(3+x^3-2ctgx+3^x\right)dx$	$\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{5x^3}dx$
$\int \left(\frac{1}{x}-\frac{3}{6-x^2}\right)dx$	$\int \left(\frac{7}{7+x^2}+\frac{5e^x}{3}\right)dx$	$\int \left(\frac{2}{5}\cos x-\frac{7}{x^2}\right)dx$
$\int \left(\frac{2}{\sqrt[4]{x}}-4x-\frac{1}{2\cos^2 x}\right)dx$	$\int \left(\frac{2}{x}+\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$	$\int \left(\frac{2}{\sqrt{9-x^2}}+\frac{3}{\sin x}\right)dx$

варіант 5

$\int (2+x)^3 dx$	$\int \left(3x+\frac{4}{x^3}-tgx+3e^x\right)dx$	$\int \frac{(\sqrt[4]{x}-2)^2}{2x^2}dx$
$\int \left(1-\frac{3}{6+x^2}\right)dx$	$\int \left(\frac{1}{\sqrt{7+x^2}}-\frac{e^x}{3}\right)dx$	$\int \left(\frac{1}{5}\sin x-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$
$\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-3+\frac{1}{5\sin^2 x}\right)dx$	$\int \left(\frac{3}{x\sqrt{x}}-\frac{2}{\cos^2 x}\right)dx$	$\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2}{\cos x}\right)dx$

варіант 6

$\int (1-x)^3 dx$	$\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)^2}{4\sqrt{x}}dx$	$\int \left(5-\frac{1}{2}\sin x-\frac{3}{x}\right)dx$
$\int \left(\frac{3}{x^2\sqrt{x}}-4tgx\right)dx$	$\int \left(3x^2-\frac{4}{\sqrt{x^3}}+ctgx+3^x\right)dx$	$\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-1+\frac{4}{\cos^2 x}\right)dx$
$\int \left(4x^3-\frac{5}{25+x^2}\right)dx$	$\int \left(\frac{1}{\sqrt{49+x^2}}+\frac{e^x}{7}\right)dx$	$\int \left(\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}+\frac{\cos x}{7}\right)dx$

варіант 7

$\int (x+1)^3 dx$	$\int \left(3x^2 - 2\cos x + \frac{8}{x} \right) dx$	$\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{3x} dx$
$\int \left(\frac{5}{x^6} + \frac{5}{25+x^2} \right) dx$	$\int \left((\sqrt[3]{x}+1)^2 - \frac{7^x}{3} \right) dx$	$\int \left(5ctgx - \frac{3}{x^4} \right) dx$
$\int \left(\frac{7}{x\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} - \frac{6}{\sin^2 x} \right) dx$	$\int \left(\frac{4}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx$	$\int \left(\frac{2}{\sqrt{9+x^2}} - \frac{5}{\cos x} \right) dx$

варіант 8

$\int (5-2x)^2 dx$	$\int \left(2 - x^3 + \frac{3}{x} + 2^x \right) dx$	$\int \frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{3x^2} dx$
$\int \left(\frac{1}{5x^2} + \frac{3}{\sqrt{25-x^2}} \right) dx$	$\int \left(\frac{4}{16+x^2} - 4e^x \right) dx$	$\int \left(2\sin x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$
$\int \left(\frac{4}{3-x^2} + \frac{1}{2\cos^2 x} \right) dx$	$\int \left(\frac{2}{\sqrt[6]{x}} - 5\sqrt{x} - \frac{3}{\sin^2 x} \right) dx$	$\int \left(\frac{4}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{1}{2\cos x} \right) dx$

варіант 9

$\int (3-x)^2 dx$	$\int \left(3x - 2\cos x + \frac{5}{x} \right) dx$	$\int \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{5x} dx$
$\int \left(1 + \frac{1}{4x} - \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx$	$\int \left(\frac{5}{5+x^2} + \frac{e^x}{5} \right) dx$	$\int \left(2 - tgx + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$
$\int \left(\frac{2}{\sqrt[7]{x}} - 7x - \frac{1}{7\cos^2 x} \right) dx$	$\int \left(\frac{5}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{7}{\sin^2 x} \right) dx$	$\int \left(\frac{5}{\sqrt{16+x^2}} + \frac{7}{\sin x} \right) dx$

варіант 10

$\int (x+2)^3 dx$	$\int \left(x^2 + 1 - \frac{2}{5} tgx + 5^x \right) dx$	$\int \frac{(x\sqrt{x}+1)^2}{4x^2} dx$
$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{6-x^2}} \right) dx$	$\int \left(\frac{7}{\sqrt{7+x^2}} + \frac{5e^x}{3} \right) dx$	$\int \left(x - 2\cos x - \frac{1}{2x^2} \right) dx$
$\int \left(\frac{1}{3x} - \frac{7}{\cos^2 x} \right) dx$	$\int \left(\frac{2}{\sqrt[4]{x}} - 4x - \frac{1}{2\sin^2 x} \right) dx$	$\int \left(\frac{2}{x\sqrt{x}} - 4 - \frac{1}{2\sin x} \right) dx$

варіант 11

$\int (2-3x)^2 dx$	$\int \left(3x - 7x^3 - 2\sin x + e^x \right) dx$	$\int \frac{(\sqrt[3]{x}-3)^2}{2\sqrt{x}} dx$
$\int \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{9+x^2}} \right) dx$	$\int \left(\frac{2}{49+x^2} + \frac{e^x}{3} \right) dx$	$\int \left(\frac{2}{5} - \cos x - \frac{1}{5\sqrt{x}} \right) dx$
$\int \left(2 + \frac{1}{2x} + \frac{4}{\cos^2 x} \right) dx$	$\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 4x - ctgx \right) dx$	$\int \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{\cos x} \right) dx$

варіант 12

$\int (1-2x)^3 dx$	$\int \left(5x + \frac{6}{x^2} - 2ctgx + 3^x \right) dx$	$\int \frac{(3\sqrt{x}-1)^2}{2x} dx$
$\int \left(6 - \frac{3}{36+x^2} \right) dx$	$\int \left(\frac{1}{\sqrt{9+x^2}} - \frac{2e^x}{3} \right) dx$	$\int \left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$
$\int \left(\frac{2}{x^2\sqrt{x}} + \frac{1}{4\cos^2 x} \right) dx$	$\int \left(\frac{1}{4\sqrt[4]{x}} - 3 + \frac{1}{2\sin^2 x} \right) dx$	$\int \left(\frac{1}{4x} + \frac{1}{2\sin x} \right) dx$

варіант 13

$\int (2+x)^3 dx$	$\int \left(2x^3 - \frac{1}{4\sqrt{x^3}} + 8ctgx + 4^x \right) dx$	$\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)^3}{4\sqrt{x}} dx$
$\int \left(4x^3 - \frac{5}{\sqrt{25+x^2}} \right) dx$	$\int \left(\frac{1}{4+x^2} + \frac{e^x}{2} \right) dx$	$\int \left(7 - \frac{1}{3}\sin x + \frac{3}{x} \right) dx$
$\int \left(\frac{5}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{2}tgx \right) dx$	$\int \left(\frac{x}{2\sqrt{x}} - x + \frac{4}{5\cos^2 x} \right) dx$	$\int \left(9 - x + \frac{4}{5\cos x} \right) dx$

варіант 14

$\int (x-1)^3 dx$	$\int \left(4x^3 - \cos x + \frac{1}{2x} \right) dx$	$\int \frac{(\sqrt{x}+3)^3}{2x} dx$
$\int \left(\frac{1}{2x\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} - \frac{5}{\sin^2 x} \right) dx$	$\int \left((2\sqrt[3]{x}-1)^2 - \frac{4^x}{3} \right) dx$	$\int \left(2 - 3ctgx - \frac{2}{x^3} \right) dx$
$\int \left(\frac{3}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx$	$\int \left(\frac{5}{x^6} - \frac{5}{25+x^2} \right) dx$	$\int \left(\frac{3}{\sqrt{9+x^2}} - \frac{3}{\cos x} \right) dx$

варіант 15

$\int \frac{(2x-3)^3}{x} dx$	$\int \left(2 - 3x^3 - \frac{2}{3}\cos x + \frac{8}{x} \right) dx$	$\int \frac{(\sqrt{x}+x)^3}{3x^2} dx$
$\int \left(\frac{2}{x^5} - x + \frac{6}{\cos^2 x} \right) dx$	$\int \left((\sqrt{x}+1)^2 + 6e^x \right) dx$	$\int \left(x + 5tgx - \frac{3}{x^5} \right) dx$
$\int \left(\frac{5}{9-x^2} - \frac{1}{2\cos^2 x} \right) dx$	$\int \left(\frac{1}{5x^2} - \frac{15}{3+x^2} \right) dx$	$\int \left(\frac{5}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{1}{2\cos x} \right) dx$

варіант 16

$\int x(2-3x)^2\,dx$	$\int\left(3x^3-2+\frac{4}{x}+2^x\right)dx$	$\int\frac{(3-2\sqrt{x})^2}{2x}\,dx$
$\int\left(\frac{4}{4+x^2}-4e^x\right)dx$	$\int\left(\frac{8}{x^2}+\frac{9}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$	$\int\left(x-2\sin x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$
$\int\left(\frac{3}{4-x^2}+\frac{1}{3\cos^2 x}\right)dx$	$\int\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-7\sqrt{x}+\frac{4}{\sin^2 x}\right)dx$	$\int\left(2-7x\sqrt{x}+\frac{4}{\sin\ \ x}\right)dx$

варіант 17

$\int\frac{(1-x)^2}{2x}\,dx$	$\int\left(3+x-\cos x+\frac{7}{x}\right)dx$	$\int\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x}\,dx$
$\int\left(\frac{2}{3\sqrt{x}}-x-\frac{9}{\cos^2 x}\right)dx$	$\int\left(\frac{1}{4x}-\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx$	$\int\left(1-2tgx+\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)dx$
$\int\left(\frac{4}{\sqrt{2+x^2}}+\frac{3}{2\sin^2 x}\right)dx$	$\int\left(\frac{2}{4+x^2}+\frac{e^x}{2}\right)dx$	$\int\left(\frac{4}{\sqrt{2-x^2}}+\frac{3}{2\sin x}\right)dx$

варіант 18

$\int\frac{(x-2)^3}{5x}\,dx$	$\int\left(\frac{3}{2}-4x^2-\frac{2}{5}tgx+5^x\right)dx$	$\int\frac{(x^2\sqrt{x}-1)^2}{4x^2}\,dx$
$\int\left(\frac{8}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{6+x^2}}\right)dx$	$\int\left(\frac{7}{\sqrt{7-x^2}}+\frac{e^x}{3}\right)dx$	$\int\left(\frac{x}{9}-2\cos x-\frac{8}{x^3}\right)dx$

$\int\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-4x^3-\frac{2}{\sin^2 x}\right)dx$	$\int\left(\frac{7}{3x}-\frac{9}{\cos^2 x}\right)dx$	$\int\left(7-x-\frac{9}{\cos x}\right)dx$

варіант 19

$\int(3-x)^2\,dx$	$\int\left(x+4x^3-\frac{1}{2}\sin x+e^x\right)dx$	$\int\frac{(\sqrt{x}-2)^3}{3x}dx$
$\int\left(\frac{5}{x^6}-\frac{5}{25+x^2}\right)dx$	$\int\left((2\sqrt[4]{x}-1)^2-\frac{4^x}{3}\right)dx$	$\int\left(\frac{2}{5}-\cos x-\frac{1}{5\sqrt{x}}\right)dx$
$\int\left(\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}-\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$	$\int\left(\frac{1}{2x\sqrt{x}}+2\sqrt{x}-4tgx\right)dx$	$\int\left(\frac{3}{\sqrt{9+x^2}}-\frac{3}{\cos x}\right)dx$

варіант 20

$\int(1-2x)^3\,dx1$	$\int\left(4x^3-\frac{1}{4\sqrt{x^2}}+7ctgx+3^x\right)dx$	$\int\frac{(\sqrt[3]{x}-1)^3}{3\sqrt{x}}dx$
$\int\left(\frac{2}{2+x^2}+\frac{e^x}{2}\right)dx$	$\int\left(4x^3-\frac{7}{\sqrt{49+x^2}}\right)dx$	$\int\left(8-\frac{1}{5}\sin x+\frac{4}{x}\right)dx$
$\int\left(\frac{3}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{2}ctgx\right)dx$	$\int\left(\frac{x^3}{2\sqrt{x}}-4x+\frac{1}{5\cos^2 x}\right)dx$	$\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{5\cos x}\right)dx$

§ 2. Основні методи інтегрування

1. ***Інтегрування безпосереднє та підстановкою***. Та обставина, що інтеграл є табличним, нерідко виявляється тільки після деяких перетворень підінтегрального виразу. Наприклад, у випадку $I = \int \frac{dx}{sin^2 x\, cos^2 x}$ відповідності до таблиці не спостерігається. Однак

$$\frac{1}{sin^2 x\, cos^2 x} = \frac{sin^2 x + cos^2 x}{sin^2 x\, cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} + \frac{1}{sin^2 x},$$

таким чином, $I = \int \frac{dx}{cos^2 x} + \int \frac{dx}{sin^2 x} = I_1 + I_2$. Обидва інтеграли I_1 та I_2 відшукуються за формулами 9 та 10 таблиці. Маємо $I = tgx - ctgx + C$.

Можливий і інший прийом:

$$\frac{1}{sin^2 x\, cos^2 x} = \frac{4}{sin^2 2x}, \quad I = 2\int \frac{2dx}{sin^2 2x} = 2\int \frac{d(2x)}{sin^2 2x} = \{u = 2x\} =$$

$$= 2\int \frac{du}{sin^2 u} = -2ctgu + C = -2ctg\,2x + C \cdot$$

Відповіді відрізняються тільки за формою, тому що $-2ctg\,2x = -2\frac{cos\,2x}{sin\,2x} =$

$$= -2\frac{cos^2 x - sin^2 x}{2\,sin\,x\,cos\,x} = -\frac{cos\,x}{sin\,x} + \frac{sin\,x}{cos\,x} = tgx - ctgx\,.$$

У загальному випадку нехай інтеграл $I(x) = \int f(x)\,dx$ не належить до табличного типу, але можливо таке перетворення: $f(x)dx = \varphi[u(x)]u'(x)dx =$ $=\varphi(u)du$. Тоді $I(x) = \int \varphi(u)\,du = I_1(u)$.

Якщо інтеграл I_1 міститься у таблиці, то, визначивши його, після виключення допоміжної змінної $u = u(x)$ одержимо величину $I(x) = I_1[u(x)]$.

Приклад 1. $\int \frac{\sqrt{1+ln\,x}}{x}dx = \begin{Bmatrix} u = 1+ln\,x \\ du = \frac{1}{x}dx \end{Bmatrix} = \int \sqrt{u}\,du = \frac{u^{3/2}}{3/2} + C =$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(1+ln\,x)^3} + C.$$

Приклад 2.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = \{u = x^2+1\} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+1} + C.$$

Приклад 3. $\int \frac{sin\,2x\,dx}{1+cos\,2x} = \begin{Bmatrix} u = 1+cos\,2x \\ du = -2\,sin\,2x\,dx \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{-2\,sin\,2x\,dx}{1+cos\,2x} =$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(1+cos\,2x)}{1+cos\,2x} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}ln|u| + C = -\frac{1}{2}ln(1+cos\,2x) + C.$$

Приклад 4. $\int \frac{x\,dx}{x^4+3} = \int \frac{x\,dx}{(x^2)^2+3} = \begin{Bmatrix} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{(x^2)^2+3} =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{u}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{x^2}{\sqrt{3}} + C.$$

Нова змінна $u = u(x)$ обирається так, щоб у підінтегральному виразі був множник $u'(x)$ або його можна було б утворити множенням на стале число. Вдалий вибір функції $u(x)$, який зводить інтеграл до табличного вигляду, можливий лише у достатньо простих випадках. До тієї самої мети веде підстановка $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – деяка гладка функція. Маємо

$$I(x) = \int f(x)dx = \begin{Bmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{Bmatrix} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int \Phi(t)dt = I_1(t). \quad (1)$$

Якщо заміна вдала, то інтеграл I_1 може виявитись табличним. Після його визначення змінну t виключають: $I(x) = I_1[\psi(x)]$, де $t = \psi(x)$ – функція, обернена відносно функції $x = \varphi(t)$. Справедливість рівності (1) при $\varphi'(t) \neq 0$ перевіряється диференціюванням за x:

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x) \text{ та } \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_t \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$$= f[\varphi(t)]\varphi'(t)\cdot\frac{1}{dx/dt} = f[\varphi(t)]\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

Приклад 5. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}} = \left\{\begin{matrix} x = t^2-1,\ t=\sqrt{x+1} \\ dx = 2t\,dt \end{matrix}\right\} = \int\frac{(t^2-1)\cdot 2t\,dt}{t} =$

$$= 2\int(t^2-1)dt = 2\left(\int t^2dt - \int dt\right) = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right) + C = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C.$$

Приклад 6. $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x^2}} = \left\{\begin{matrix} x = t^3,\ t=\sqrt[3]{x} \\ dx = 3t^2\,dt \end{matrix}\right\} = \int\frac{3t^2\,dt}{1+t^2} = 3\int\frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt =$

$$= 3\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 3\left(\int dt - \int\frac{dt}{t^2+1}\right) = 3t - 3arctgt + C = 3\sqrt[3]{x} - 3arctg\sqrt[3]{x} + C.$$

Індивідуальне завдання 2

варіант 1

$\int\frac{1}{x(\ln x+2)}dx$	$\int\frac{\sin x}{(1+\cos x)}dx$	$\int\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}dx$
$\int\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}dx$	$\int\frac{arctg\,2x}{1+4x^2}dx$	$\int\frac{1}{x(2\ln x+1)}dx$
$\int x\sin x^2dx$	$\int\frac{e^{x/5}}{1-2e^{x/5}}dx$	$\int x\left(\sqrt{3-x^2}\right)^3dx$

варіант 2

$\int\frac{1}{x\sqrt{\ln x+5}}dx$	$\int\frac{\cos x}{(7+\sin x)}dx$	$\int\frac{\sqrt[3]{tgx}}{\cos^2 x}dx$
$\int x\sqrt[5]{x^2+4}dx$	$\int\frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx$	$\int\frac{1}{x(\ln^2 x+4)}dx$
$\int xtgx^2dx$	$\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$	$\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

варіант 3

$\int \frac{\sqrt{\ln x + 3}}{x} dx$	$\int \frac{\cos x}{\sqrt{2 - \sin x}} dx$	$\int \frac{\sqrt[5]{ctgx}}{\sin^2 x} dx$
$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 2}} dx$	$\int \frac{\sqrt{arctgx}}{1 + x^2} dx$	$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln^2 x + 4}} dx$
$\int xctgx^2 dx$	$\int \frac{e^x}{4 + e^{2x}} dx$	$\int \frac{\arcsin^5 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

варіант 4

$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$	$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} dx$	$\int \frac{\sqrt{2 + ctgx}}{\sin^2 x} dx$
$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 2}} dx$	$\int \frac{\sqrt{arctg^3 x}}{1 + x^2} dx$	$\int \frac{1}{x(\ln^2 x + 4)} dx$
$\int x \cos x^2 dx$	$\int \frac{e^x}{4 - e^{2x}} dx$	$\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

варіант 5

$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x + 1}}{x} dx$	$\int \frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2} dx$	$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos 2x}} dx$
$\int \frac{x^3}{\sqrt{5 + x^4}} dx$	$\int \frac{\sqrt[4]{arctg\, 2x}}{1 + 4x^2} dx$	$\int \frac{1}{x(2\ln x + 1)^2} dx$
$\int x^2 \sin x^3 dx$	$\int \frac{e^x}{1 + 2e^x} dx$	$\int x\left(\sqrt{3 + x^2}\right) dx$

варіант 6

$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$	$\int \cos x \sin^3 x dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{tgx} \cos^2 x}$
$\int x^3 \sqrt{x^4 + 4} dx$	$\int \frac{dx}{(1 + x^2) arctg^3 x}$	$\int \frac{\ln^2 x + 4}{x} dx$

$\int xctgx^2 dx$	$\int \frac{e^{2x}}{16+e^{4x}}dx$	$\int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

варіант 7

$\int \frac{dx}{x(2\ln x+3)^3}$	$\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{2+\sin 3x}}dx$	$\int \frac{tg^2 x}{\sin^2 x}dx$
$\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{2x^4+1}}dx$	$\int \frac{dx}{(1+x^2)arctgx}$	$\int \frac{\sqrt{\ln x+4}}{x}dx$
$\int xe^{x^2}dx$	$\int e^x(4+3e^x)^3 dx$	$\int \frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$

варіант 8

$\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$	$\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$	$\int \frac{(ctgx+1)^2}{\sin^2 x}dx$
$\int x^3 \cos x^4 dx$	$\int \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$	$\int \frac{1}{x(\ln^2 x+4)}dx$
$\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$	$\int \frac{e^x}{\sqrt{9-e^{2x}}}dx$	$\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

варіант 9

$\int \frac{\ln^7 x}{x}dx$	$\int \frac{\cos 2x}{(7+3\sin 2x)^2}dx$	$\int \frac{2^{tgx}}{\cos^2 x}dx$
$\int \frac{x^2}{\sqrt{2+2x^3}}dx$	$\int \frac{arctg^6 x}{1+x^2}dx$	$\int \frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$
$\int \frac{xdx}{4+x^4}$	$\int \frac{e^x}{\sqrt{5+2e^x}}dx$	$\int \frac{xdx}{5-x^2}$

варіант 10

$\int \frac{(2+5\ln x)^2}{x}dx$	$\int \cos x \sin^7 xdx$	$\int \frac{2^{tgx}}{\cos^2 x}dx$
$\int x\sin(2x^2+1)dx$	$\int \frac{dx}{(1+x^2)arctgx}$	$\int e^x \cos e^x dx$

$\int \frac{1}{x}\cos(\ln\ x)dx$	$\int \frac{e^x}{\sqrt{7+e^{2x}}}dx$	$\int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

варіант 11

$\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx$	$\int \cos x 5^{\sin x}dx$	$\int \frac{ctg^2 x}{\sin^2 x}dx$
$\int x^3 \sin(2-x^4)dx$	$\int \frac{e^{arcctgx}}{(1+x^2)}dx$	$\int \frac{\sqrt{\ln x+4}}{x}dx$
$\int x^4 tgx^5 dx$	$\int \frac{(4+ctgx)^2}{\sin^2 x}dx$	$\int \frac{\arccos^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

варіант 12

$\int \frac{\ln^5 x}{x}dx$	$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+3\cos 2x}}dx$	$\int \frac{\sqrt{3ctgx+7}}{\sin^2 x}dx$
$\int x^3 tgx^4 dx$	$\int \frac{3^{arctgx}}{1+x^2}dx$	$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$
$\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx$	$\int e^x \cos e^x dx$	$\int \frac{5^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

варіант 13

$\int \frac{\sqrt[5]{\ln x}}{x}dx$	$\int \frac{\cos 3x}{(2+\sin 3x)^3}dx$	$\int \frac{2^{tgx}}{\cos^2 x}dx$
$\int \frac{x^2}{x^3-5}dx$	$\int \frac{\sqrt{arctg^3 x}}{1+x^2}dx$	$\int \frac{7^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$
$\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^4}}$	$\int \frac{e^x}{\sqrt{9+e^x}}dx$	$\int \frac{xdx}{25-x^2}$

варіант 14

$\int \frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x+2}}dx$	$\int \frac{\sin 2x}{(8-\cos 2x)}dx$	$\int \sin 2x e^{\cos 2x}dx$
$\int \frac{x}{\sqrt{15+x^2}}dx$	$\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx$	$\int \frac{1}{x(\ln x-1)^2}dx$

$\int x\cos x^2 dx$	$\int \frac{e^x}{4-e^{2x}}dx$	$\int x^2\sqrt{3-x^3}dx$

варіант 15

$\int \frac{1}{x\sqrt{2\ln x+9}}dx$	$\int \frac{\cos x}{(2-\sin x)^3}dx$	$\int \frac{5^{tgx}}{\cos^2 x}dx$
$\int x\sqrt[3]{x^2+4}dx$	$\int \frac{\sqrt{arctg^3 x}}{1+x^2}dx$	$\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$
$\int xctgx^2 dx$	$\int \frac{e^x}{\sqrt{1+2e^{2x}}}dx$	$\int \frac{\arcsin^5 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

варіант 16

$\int \frac{\sqrt{2\ln x-1}}{x}dx$	$\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{2+\sin 5x}}dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{tgx}}{\cos^2 x}dx$
$\int \frac{x}{\sqrt[3]{5x^2+2}}dx$	$\int \frac{7^{arctgx}}{1+x^2}dx$	$\int \frac{1}{x\sqrt{9-\ln^2 x}}dx$
$\int x\cos(3x^2-2)dx$	$\int \frac{e^x}{16+e^{2x}}dx$	$\int \frac{\arccos^4 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

варіант 17

$\int \frac{\ln^9 x}{x}dx$	$\int \frac{\cos 6x}{\sqrt{1-\sin^2 6x}}dx$	$\int \frac{\sqrt[7]{4+3ctgx}}{\sin^2 x}dx$
$\int \frac{x^5}{\sqrt{x^6+9}}dx$	$\int \frac{\sqrt{arctg^5 x}}{1+x^2}dx$	$\int \frac{1}{x(\ln^2 x+9)}dx$
$\int x^4\cos x^5 dx$	$\int \frac{e^x}{3+e^{2x}}dx$	$\int \frac{\sqrt{\arcsin^3 x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

варіант 18

$\int \frac{\sqrt[8]{5\ln x+7}}{x}dx$	$\int \frac{\sin x}{(1+2\cos x)^5}dx$	$\int \frac{\sin 4x}{\sqrt{4+\cos 4x}}dx$
$\int \frac{x^2}{\sqrt{8+5x^3}}dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{arctgx}}{1+x^2}dx$	$\int \frac{1}{x(2\ln x+1)^2}dx$

$\int x^3 5^{x^4}\,dx$	$\int \frac{e^x}{7-2e^x}\,dx$	$\int \frac{3^{ctgx}}{\sin^2 x}\,dx$

варіант 19

$\int \frac{\cos(2+5\ln x)}{x}\,dx$	$\int \cos^3 x \sin x dx$	$\int \frac{5^{tgx}}{\cos^2 x}dx$
$\int xe^{2x^2+1}dx$	$\int \frac{dx}{(1+x^2)arctg^4 x}$	$\int \frac{e^x}{\cos^2 e^x}\,dx$
$\int \frac{1}{x}\sin(\ln x)dx$	$\int \frac{e^x}{\sqrt{7-e^{2x}}}\,dx$	$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

варіант 20

$\int \frac{(2-3\ln x)^3}{x}dx$	$\int \cos x 6^{\sin x}\,dx$	$\int \frac{ctg^2 x}{\sin^2 x}\,dx$
$\int x^3 \sin(5-3x^4)dx$	$\int \frac{e^{arctgx}}{(1+x^2)}\,dx$	$\int \frac{\sqrt{7\ln x+4}}{x}\,dx$
$\int xtg(2+x^2)dx$	$\int \frac{(1+tgx)^2}{\cos^2 x}\,dx$	$\int \frac{\arccos^6 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

§ 3. ***Інтегрування деяких виразів, що містять квадратний тричлен***. Інтеграли вигляду

$$I_1 = \int \frac{dx}{X}; \qquad I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{X}}; \qquad I_3 = \int \frac{Ax + B}{X} dx; \qquad I_4 = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{X}} dx,$$

де $X = ax^2 + bx + c$, зводяться до табличних через виділення з X повного квадрата:

$$X = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right].$$

Для інтегралів I_1, I_2 цієї операції достатньо, для інтегралів I_3, I_4 спочатку слід утворити в чисельнику диференціал величини X.

Дійсно, $$I_3 = \int \frac{Ax + B}{X} dx = \left\{ \begin{matrix} u = ax^2 + bx + c \\ du = (2ax + b)dx \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + B - \frac{Ab}{2a}}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} =$$

$$= \frac{A}{2a} \int \frac{d\left(ax^2 + bx + c\right)}{ax^2 + bx + c} + \frac{1}{a}\left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)}.$$

Перший інтеграл справа типу $\int \frac{du}{u}$ знаходиться за формулою 3 таблиці, до другого інтегралу в залежності від знака виразу $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$ застосовується формула 13 або 14 (4^0 § 34). Подібним чином знаходиться й інтеграл I_4.

Приклад 7. $$I = \int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2 - 12x + 1}} = \left\{ \begin{matrix} u = 4x^2 - 12x + 1 \\ du = (8x - 12)dx \end{matrix} \right\} = \int \frac{\frac{1}{8}(8x - 12) + \frac{12}{8}}{\sqrt{4x^2 - 12x + 1}} dx =$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{8x-12}{\sqrt{4x^2-12x+1}}dx+\frac{3}{2\cdot 2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+\frac{1}{4}}}=\frac{1}{8}\int\frac{du}{\sqrt{u}}+\frac{3}{4}\int\frac{d\left(x-3/2\right)}{\sqrt{\left(x-3/2\right)^2-2}}.$$

Обидва інтеграли справа мають тепер табличний вигляд. Перший відповідає формулі 2а таблиці, другий – формулі 16 при $u = x - 3/2$, $a^2 = 2$. Таким чином,

$$I=\frac{1}{8}\cdot 2\sqrt{u}+\frac{3}{4}ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2-12x+1}+\frac{3}{4}ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2}\right|+C.$$

Індивідуальне завдання 3

варіант 1

$\int\frac{dx}{x^2-3x+5}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+5}}$	$\int\frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-3x+5}}$
$\int\frac{(3x+2)dx}{x^2-3x+5}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{1+6x-x^2}}$	$\int\frac{dx}{3x^2-x+5}$
$\int\frac{(3x+2)dx}{3x^2-3x+5}$	$\int\frac{(7x-2)dx}{\sqrt{2x^2-3x+5}}$	$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x-5}}$

варіант 2

$\int\frac{dx}{x^2+3x+1}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+1}}$	$\int\frac{(2x+7)dx}{\sqrt{x^2+3x+1}}$
$\int\frac{(5x+2)dx}{x^2+3x+1}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{1+4x-x^2}}$	$\int\frac{dx}{2x^2+x+1}$
$\int\frac{(x+2)dx}{3x^2+3x+1}$	$\int\frac{(x-2)dx}{\sqrt{2x^2+3x+1}}$	$\int\frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+12x+11}}$

варіант 3

$\int\frac{dx}{x^2+4x+1}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$	$\int\frac{(2x+5)dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$

$\int \frac{(5x+2)dx}{x^2+4x+1}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x-x^2}}$	$\int \frac{dx}{2x^2+x+1}$
$\int \frac{(x+2)dx}{2x^2+4x+1}$	$\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{2x^2+4x+1}}$	$\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{x^2+6x+11}}$

варіант 4

$\int \frac{dx}{x^2+6x+1}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+1}}$	$\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2+6x+1}}$
$\int \frac{(x+2)dx}{x^2+6x+1}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x-x^2}}$	$\int \frac{dx}{2x^2+x+1}$
$\int \frac{(x+1)dx}{2x^2+3x+1}$	$\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{2x^2+3x+1}}$	$\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{x^2+8x+1}}$

варіант 5

$\int \frac{dx}{x^2+8x+1}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+1}}$	$\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2+8x+1}}$
$\int \frac{xdx}{x^2+8x+1}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-x^2}}$	$\int \frac{dx}{2x^2+2x+1}$
$\int \frac{(x+9)dx}{2x^2+2x+1}$	$\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{5x^2+3x-1}}$	$\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}$

варіант 5

$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$	$\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$
$\int \frac{xdx}{x^2+2x+5}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{2-4x-x^2}}$	$\int \frac{dx}{2x^2+x+2}$
$\int \frac{(x-1)dx}{2x^2+x+2}$	$\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{3x^2+x-2}}$	$\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{3x^2+x-2}}$

варіант 6

$\int \frac{dx}{x^2+6x-5}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x-5}}$	$\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2+6x-5}}$

$\int \frac{xdx}{x^2+6x-5}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{7-8x-x^2}}$	$\int \frac{dx}{2x^2+3x+5}$
$\int \frac{(x-1)dx}{2x^2+3x+5}$	$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+x-2}}$	$\int \frac{(3x+3)dx}{\sqrt{x^2+x-2}}$

варіант 7

$\int \frac{dx}{x^2+4x-9}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x-9}}$	$\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2+4x-9}}$
$\int \frac{xdx}{x^2+4x-9}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{7+2x-x^2}}$	$\int \frac{dx}{2x^2+5x-1}$
$\int \frac{(x-1)dx}{2x^2+5x-1}$	$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+7x-2}}$	$\int \frac{(3x+4)dx}{\sqrt{x^2+7x-2}}$

варіант 8

$\int \frac{dx}{x^2-2x-5}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-5}}$	$\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x-5}}$
$\int \frac{xdx}{x^2-2x-5}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$	$\int \frac{dx}{2x^2-5x-1}$
$\int \frac{(x-1)dx}{2x^2-5x-1}$	$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+3x+4}}$	$\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2+3x+4}}$

варіант 9

$\int \frac{dx}{x^2-2x-1}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-1}}$	$\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x-1}}$
$\int \frac{xdx}{x^2-2x-1}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}}$	$\int \frac{dx}{2x^2-x-1}$
$\int \frac{(x-1)dx}{2x^2-x-1}$	$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+x+4}}$	$\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2+x+4}}$

варіант 10

$\int \frac{dx}{x^2-2x-4}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-4}}$	$\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x-4}}$
$\int \frac{xdx}{x^2-2x-4}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{8-4x-x^2}}$	$\int \frac{dx}{2x^2-2x+7}$
$\int \frac{(x-1)dx}{2x^2-2x+7}$	$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+x+9}}$	$\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2+x+9}}$

варіант 11

$\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-3}}$	$\int \frac{(4x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x-3}}$
$\int \frac{xdx}{x^2-2x-3}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-6x-x^2}}$	$\int \frac{dx}{4x^2-2x+1}$
$\int \frac{(x-1)dx}{4x^2-2x+1}$	$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2x^2+x+2}}$	$\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{2x^2+x+2}}$

варіант 12

$\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$	$\int \frac{(6x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$
$\int \frac{xdx}{x^2-2x+5}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{7-2x-x^2}}$	$\int \frac{dx}{3x^2-2x+1}$
$\int \frac{(x-1)dx}{3x^2-2x+1}$	$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{4x^2+x+2}}$	$\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{4x^2+x+2}}$

варіант 13

$\int \frac{dx}{x^2-2x+12}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+12}}$	$\int \frac{(6x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x+12}}$
$\int \frac{xdx}{x^2-2x+12}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{6-2x-x^2}}$	$\int \frac{dx}{2x^2-x+4}$
$\int \frac{(x-1)dx}{2x^2-x+4}$	$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{9x^2+x+2}}$	$\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{9x^2+x+2}}$

варіант 14

$\int \frac{dx}{x^2+2x+12}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+12}}$	$\int \frac{(6x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+12}}$
$\int \frac{xdx}{x^2+2x+12}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{6+2x-x^2}}$	$\int \frac{dx}{2x^2-3x-4}$
$\int \frac{(x-1)dx}{2x^2-3x-4}$	$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{9x^2-x+2}}$	$\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{9x^2-x+2}}$

варіант 15

$\int \frac{dx}{x^2-2x+11}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+11}}$	$\int \frac{(6x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x+11}}$
$\int \frac{xdx}{x^2-2x+11}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x-x^2}}$	$\int \frac{dx}{2x^2-x-4}$
$\int \frac{(3x-1)dx}{2x^2-x-4}$	$\int \frac{(5x+1)dx}{\sqrt{9x^2-x+3}}$	$\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{9x^2-x+3}}$

варіант 16

$\int \frac{dx}{x^2-2x+10}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}$	$\int \frac{(6x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}$
$\int \frac{xdx}{x^2-2x+10}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{9+2x-x^2}}$	$\int \frac{dx}{2x^2-2x-3}$
$\int \frac{(3x-1)dx}{2x^2-2x-3}$	$\int \frac{(5x+1)dx}{\sqrt{x^2-x+8}}$	$\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2-x+8}}$

варіант 17

$\int \frac{dx}{x^2-3x+1}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+1}}$	$\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-3x+1}}$
$\int \frac{(3x+2)dx}{x^2-3x+1}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$	$\int \frac{dx}{3x^2-2x+5}$
$\int \frac{(3x+2)dx}{3x^2-2x+5}$	$\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{2x^2-3x+5}}$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+6x-5}}$

варіант 18

$\int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$	$\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$
$\int \frac{(x+2)dx}{x^2 - x + 1}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{5 + x - x^2}}$	$\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 5}$
$\int \frac{(3x+2)dx}{2x^2 - 2x + 5}$	$\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 5}}$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2 + 6x - 5}}$

варіант 19

$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 3}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$	$\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$
$\int \frac{(x+2)dx}{x^2 - 2x + 3}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x - x^2}}$	$\int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 1}$
$\int \frac{(3x+2)dx}{2x^2 - 4x + 1}$	$\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{4x^2 - 3x + 5}}$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{9x^2 + 6x - 5}}$

варіант 20

$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 3}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 3}}$	$\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 3}}$
$\int \frac{(x+2)dx}{x^2 - 6x + 3}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x - 4x^2}}$	$\int \frac{dx}{2x^2 - 8x + 5}$
$\int \frac{(3x+2)dx}{2x^2 - 8x + 5}$	$\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{16x^2 - 3x + 5}}$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{9x^2 + 6x + 5}}$

§ 4. ***Інтегрування деяких тригонометричних функцій***.

1. Інтеграли вигляду $\int sin^m x\, cos^n x\, dx$. (2)

а) Якщо хоча б один з показників m або n – непарне додатне число, то інтегрування зводиться до відшукування первісних від степеневих функцій.

Дійсно, нехай $m = 2k + 1$, $k \in N_0$. Від непарного степеня синуса відокремлюємо його перший степінь – він призначається для утворення диференціала косинуса, парний степінь, що залишився, перетворюємо на косинус того самого аргументу за формулою $sin^2 x = 1 - cos^2 x$. Здійснюємо підстановку $u = cos\, x$:

$$\int sin^{2k+1} x\, cos^n x dx = \int sin^{2k} x\, cos^n x \sin x dx =$$

$$= -\int \left(1 - cos^2 x\right)^k cos^n x d\left(cos\, x\right) = \left\{u = cos\, x\right\} = -\int \left(1 - u^2\right)^k u^n du.$$

Піднесемо двочлен до степеня k та розкриємо дужки. Дістанемо $k + 1$ доданків степеневого типу, які інтегруємо за формулами 1 – 3 таблиці.

Приклад 8. $\int \sqrt[3]{\sin x} \cos^5 x dx = \int \sqrt[3]{\sin x} \cos^4 x \cos x dx =$

$$= \int \sqrt[3]{\sin x}\left(1 - \sin^2 x\right)^2 d\left(\sin x\right) = \left\{u = \sin x\right\} = \int u^{1/3}\left(1 - u^2\right)^2 du =$$

$$= \int \left(u^{1/3} - 2u^{7/3} + u^{13/3}\right) du = \frac{u^{4/3}}{4/3} - 2\frac{u^{10/3}}{10/3} + \frac{u^{16/3}}{16/3} + C =$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{\sin^4 x} - \frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^{10} x} + \frac{3}{16}\sqrt[3]{\sin^{16} x} + C.$$

б) Якщо обидва показники m та n – парні додатні числа (одне з них може дорівнювати нулю), то інтеграл відшукується через зниження степеня підінтегральних функцій за допомогою формул

$$sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - cos\,2\alpha), \qquad cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + cos\,2\alpha),$$
$$sin\,\alpha\, cos\,\alpha = \frac{1}{2} sin\,2\alpha. \tag{3}$$

Приклад 9. $I = \int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos^2 x dx =$

$$= \int \frac{1}{4}\sin^2 2x \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx.$$

Перший інтеграл справа містить $sin\,2x$ у парному степені і потребує подальшого зниження степеня, другий – відноситься до випадку а), тому що з`явився непарний степінь $cos\,2x$. Маємо

$$I = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int(1 - \cos 4x)dx + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

2. Інтеграли вигляду $\int tg^m x\, sec^n\, x\, dx$, $\int ctg^m x\, cosec^n x\, dx$. (4)

Якщо показник *n* – парне додатне число, то при будь-якому значенні *m*, використовуючи тригонометричні тотожності

$$1 + tg^2x = sec^2x, \qquad 1 + ctg^2x = cosec^2x, \tag{5}$$

можна за допомогою підстановки $u = tgx$ або $u = ctgx$ отримати інтеграли від степеневих функцій.

Приклад 10.

$$\int \frac{\sec^4 x}{\sqrt{tgx}}dx = \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{tgx}}\sec^2 x dx = \int \frac{1 + tg^2 x}{\sqrt{tgx}} d(tgx) = \{u = tgx\} =$$

$$= \int \frac{1 + u^2}{\sqrt{u}}du = \int \frac{du}{\sqrt{u}} + \int u^{3/2}du = 2\sqrt{u} + \frac{u^{5/2}}{5/2} + C = 2\sqrt{tgx} + \frac{2}{5}\sqrt{tg^5 x} + C.$$

3. Інтеграли вигляду $\int sin\,mx\, cos\,nx\, dx$, $\int sin\,mx\, sin\,nx\, dx$,

$$\int cos\,mx\, cos\,nx\, dx. \tag{6}$$

Дані інтеграли зводяться до табличних за допомогою формул

$$sin\,\alpha\,cos\,\beta = \frac{1}{2}\left[sin(\alpha-\beta)+sin(\alpha+\beta)\right],$$
$$sin\,\alpha\,sin\,\beta = \frac{1}{2}\left[cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta)\right], \qquad (7)$$
$$cos\,\alpha\,cos\,\beta = \frac{1}{2}\left[cos(\alpha-\beta)+cos(\alpha+\beta)\right].$$

Приклад 11.

$$\int \sin 7x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int(\cos 4x - \cos 10x)dx = \frac{1}{2\cdot 4}\int \cos 4x d(4x) -$$
$$-\frac{1}{2\cdot 10}\int \cos 10x\, d(10x) = \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{20}\sin 10x + C\,.$$

Індивідуальне завдання 4

варіант 1

$I=\int \sin^2 x \cos^3 x dx$	$I=\int \sin^5 x \cos^4 x dx$	$I=\int \sin^5 x \cos^3 x dx$
$I=\int \sin^2 x \cos^2 x dx$	$\int \frac{\sec^4 x}{tg^3 x}dx$	$\int \frac{ctg^4 x}{\sin^2 x}dx$
$\int \sin 5x \sin 3x dx$	$\int \cos 5x \sin 3x dx$	$\int \cos 5x \cos 3x dx$

варіант 2

$I=\int \sin^3 x \cos^2 x dx$	$I=\int \sin^4 x \cos^5 x dx$	$I=\int \sin^7 x \cos^3 x dx$
$I=\int \sin^4 x \cos^2 x dx$	$\int \frac{\sqrt{tgx}dx}{\cos^2 x}$	$\int \frac{ctg^2 x}{\sin^4 x}dx$
$\int \sin 6x \sin 3x dx$	$\int \cos 7x \sin 3x dx$	$\int \cos 5x \cos 2x dx$

варіант 3

$I=\int \sin^7 x\cos^4 xdx$	$I=\int \sin^6 x\cos^5 xdx$	$I=\int \sin^7 x\cos^{13} xdx$
$I=\int \sin^2 x\cos^4 xdx$	$\int \frac{dx}{\cos^6 x}$	$\int \frac{ctgx}{\sin^4 x}dx$
$\int \sin 3x\sin 2xdx$	$\int \cos 7x\sin 5xdx$	$\int \cos x\cos 7xdx$

варіант 4

$I=\int \sin^3 x\cos^8 xdx$	$I=\int \sin^6 x\cos^3 xdx$	$I=\int \sin^3 x\cos^3 xdx$
$I=\int \sin^2 x\cos^2 xdx$	$\int \frac{dx}{\cos^4 x}$	$\int \frac{\sqrt{ctgx}}{\sin^4 x}dx$
$\int \sin 7x\sin 2xdx$	$\int \cos 2x\sin 5xdx$	$\int \cos x\cos 2xdx$

варіант 5

$I=\int \sin x\cos^6 xdx$	$I=\int \sin^4 x\cos^3 xdx$	$I=\int \sin^5 x\cos^3 xdx$
$I=\int \sin^4 xdx$	$\int \frac{\sqrt{tgx}dx}{\cos^4 x}$	$\int \frac{dx}{ctgx\sin^4 x}$
$\int \sin x\sin 2xdx$	$\int \cos x\sin 5xdx$	$\int \cos 4x\cos 2xdx$

варіант 6

$I=\int \sin^7 x\cos^2 xdx$	$I=\int \sin^4 x\cos^5 xdx$	$I=\int \sin^{15} x\cos^3 xdx$
$I=\int \cos^4 xdx$	$\int \frac{\sqrt{tgx}dx}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{ctgx}\sin^4 x}$
$\int \sin 8x\sin 2xdx$	$\int \cos 5x\sin 2xdx$	$\int \cos 4x\cos 6xdx$

варіант 7

$I=\int \sin^3 x\cos^4 xdx$	$I=\int \sin^2 x\cos^7 xdx$	$I=\int \sin^{15} x\cos xdx$

$I=\int \cos^2 xdx$	$\int \frac{dx}{tgx\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{ctgx}\sin^2 x}$
$\int \sin 2x \sin 2xdx$	$\int \cos 5x \sin 3xdx$	$\int \cos 4x \cos 2xdx$

варіант 8

$I=\int \sin^5 x\cos^2 xdx$	$I=\int \sin^4 x\cos^3 xdx$	$I=\int \sin^{11} x\cos^3 xdx$
$I=\int \sin^2 xdx$	$\int \frac{tg^2 xdx}{\cos^2 x}$	$\int \frac{\sqrt[3]{ctg^2 xdx}}{\sin^2 x}$
$\int \sin 7x \sin 2xdx$	$\int \cos 5x \sin xdx$	$\int \cos x \cos 2xdx$

варіант 9

$I=\int \sin^7 x\cos^2 xdx$	$I=\int \sin^6 x\cos^3 xdx$	$I=\int \sin^9 x\cos^3 xdx$
$I=\int \cos^4 x\sin^2 xdx$	$\int \frac{\sqrt[3]{tg^2 xdx}}{\cos^4 x}$	$\int \frac{\sqrt[3]{ctg^2 xdx}}{\sin^4 x}$
$\int \sin x \sin 2xdx$	$\int \cos x \sin 4xdx$	$\int \cos 7x \cos 2xdx$

варіант 10

$I=\int \sin^3 x\cos^4 xdx$	$I=\int \sin^4 x\cos^3 xdx$	$I=\int \sin^{19} x\cos^3 xdx$
$I=\int \cos^2 x\sin^4 xdx$	$\int \frac{tg^4 xdx}{\cos^4 x}$	$\int \frac{\sqrt[5]{ctg^4 xdx}}{\sin^4 x}$
$\int \sin 3x \sin xdx$	$\int \cos 7x \sin 4xdx$	$\int \cos 8x \cos 2xdx$

варіант 11

$I=\int \sin^3 x \cos^2 x dx$	$I=\int \sin^2 x \cos^5 x dx$	$I=\int \sin x \cos^3 x dx$
$I=\int \sin^6 x dx$	$\int \frac{\sqrt[5]{tg^4 x dx}}{\cos^4 x}$	$\int \frac{\sqrt[3]{ctg^2 x dx}}{\sin^4 x}$
$\int \sin 3x \sin 3x dx$	$\int \cos 2x \sin 4x dx$	$\int \cos 3x \cos 5x dx$

варіант 12

$I=\int \sin^4 x \cos^3 x dx$	$I=\int \sin^5 x \cos^2 x dx$	$I=\int \sin^5 x \cos^7 x dx$
$I=\int \sin^4 x dx$	$\int \frac{\sec^4 x}{tgx} dx$	$\int \frac{ctg^4 x}{\sin^4 x} dx$
$\int \sin 5x \sin 13x dx$	$\int \cos 5x \sin 2x dx$	$\int \cos 5x \cos 10x dx$

варіант 13

$I=\int \sin^3 x \cos^{12} x dx$	$I=\int \sin^{14} x \cos^5 x dx$	$I=\int \sin^7 x \cos^{31} x dx$
$I=\int \sin^6 x dx$	$\int \frac{\sqrt{tgx} dx}{\cos^4 x}$	$\int \frac{\sqrt{ctgx}}{\sin^4 x} dx$
$\int \sin 16x \sin 3x dx$	$\int \cos 7x \sin x dx$	$\int \cos 5x \cos 12x dx$

варіант 14

$I=\int \sin^3 x \cos^{14} x dx$	$I=\int \sin^6 x \cos^3 x dx$	$I=\int \sin^3 x \cos^{13} x dx$
$I=\int \cos^4 x dx$	$\int \frac{dx}{\cos^6 x}$	$\int \frac{\sqrt[5]{ctg^2 x}}{\sin^4 x} dx$
$\int \sin 3x \sin 12x dx$	$\int \cos x \sin 5x dx$	$\int \cos x \cos 4x dx$

варіант 15

$I=\int \sin^5 x\cos^8 xdx$	$I=\int \sin^6 x\cos^5 xdx$	$I=\int \sin^3 x\cos^{13} xdx$
$I=\int \sin^2 x\cos^2 xdx$	$\int \frac{tg^4 xdx}{\cos^4 x}$	$\int \frac{dx}{ctg^4 x\sin^4 x}$
$\int \sin 7x\sin 3xdx$	$\int \cos 2x\sin 6xdx$	$\int \cos 7x\cos 2xdx$

варіант 16

$I=\int \sin^3 x\cos^8 xdx$	$I=\int \sin^4 x\cos^5 xdx$	$I=\int \sin^5 x\cos^7 xdx$
$I=\int \cos^4 xdx$	$\int \frac{dx}{tg^2 x\cos^4 x}$	$\int \frac{dx}{ctg^2 x\sin^4 x}$
$\int \sin x\sin 12xdx$	$\int \cos 5x\sin 5xdx$	$\int \cos 4x\cos 8xdx$

варіант 17

$I=\int \sin^3 x\cos^4 xdx$	$I=\int \sin^4 x\cos xdx$	$I=\int \sin x\cos^{13} xdx$
$I=\int \cos^2 xdx$	$\int \frac{\sqrt{tgx}dx}{\cos^4 x}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{ctgx}\sin^4 x}$
$\int \sin 4x\sin 2xdx$	$\int \cos 3x\sin 2xdx$	$\int \cos 4x\cos 2xdx$

варіант 18

$I=\int \sin^3 x\cos^8 xdx$	$I=\int \sin^6 x\cos^5 xdx$	$I=\int \sin^{15} x\cos xdx$
$I=\int \cos^2 x\sin^2 xdx$	$\int \frac{dx}{tgx\cos^4 x}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{ctgx}\sin^4 x}$
$\int \sin 2x\sin 12xdx$	$\int \cos 5x\sin xdx$	$\int \cos 4x\cos 2xdx$

варіант 19

$I=\int\sin^5 x\cos^8 xdx$	$I=\int\sin^6 x\cos^3 xdx$	$I=\int\sin^9 x\cos^3 xdx$
$I=\int\sin^2 xdx$	$\int\frac{tg^2 xdx}{\cos^4 x}$	$\int\frac{\sqrt[3]{ctg^2 x}dx}{\sin^4 x}$
$\int\sin x\sin 2xdx$	$\int\cos 5x\sin 4xdx$	$\int\cos 7x\cos 2xdx$

варіант 20

$I=\int\sin^3 x\cos^4 xdx$	$I=\int\sin^8 x\cos^3 xdx$	$I=\int\sin^{19} x\cos^3 xdx$
$I=\int\cos^4 xdx$	$\int\frac{\sqrt[5]{tg^2 x}dx}{\cos^4 x}$	$\int\frac{ctg^2 xdx}{\sin^4 x}$
$\int\sin 9x\sin 2xdx$	$\int\cos 5x\sin 4xdx$	$\int\cos 7x\cos xdx$

§ 5. ***Інтегрування частинами***.

Нехай $u = u(x)$ та $v = v(x)$ – дві неперервне диференційовані функції. Запишемо відоме співвідношення $(uv)' = u'v + + uv'$. Добуток uv є первісною по відношенню до суми $u'v + uv'$. Тому $\int(u'v+uv')dx = uv + C$. Сталу C можна віднести до інтегралу з лівої частини рівності. Оскільки $u'dx = du$, $v'dx = dv$, то $\int vdu + \int udv = uv$. Звідси випливає **формула інтегрування частинами**

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{8}$$

При вдалому виборі множників u та dv в багатьох випадках за допомогою рівності (8) можливі спрощення. Інтеграл, що стоїть зліва, зводиться до більш простого інтегралу і таким чином визначається. Формулу (8) застосовують для інтегрування добутків типу $x^n \sin x$, $x^n \cos x$, $x^n e^x$, $x^n \ln x$, де $n\in N$, а також обернених тригонометричних, логарифмічних та інших функцій. Через «u», як правило, вибирають множник, який при диференціюванні спрощується. Інша частина підінтегрального виразу утворює множник «dv». Його слід підбирати так, щоб інтегруванням можна було знайти v. Тут береться будь-яка первісна, зокрема, вважають $C = 0$. Інтегрування тільки частин під-інтегрального виразу dv стало підставою для назви формули (8).

Приклад 12. $\int x\cos 2x dx = \left\{ \begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = \cos 2x dx & v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right\} =$

$= \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

Нерідко формулу (8) доводиться застосовувати повторно декілька разів.

Приклад 13. $\int x^2 e^{-x}\, dx = \left\{ \begin{array}{c|c} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = e^{-x}\, dx & v = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x} \end{array} \right\} =$

$= -x^2 e^{-x} + 2\int xe^{-x}\, dx = \left\{ \begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}\, dx & v = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x} \end{array} \right\} = -x^2 e^{-x} +$

$+ 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx\right) = -x^2 e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right) + C = -\left(x^2 + 2x + 2\right)e^{-x} + C$.

Навіть коли спрощення інтеграла не відбувається, формула (8) може виявитися корисною.

Приклад 14. $I = \int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{c|c} u = \sqrt{x^2 + a^2} & du = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx \\ dv = dx & v = \int dx = x \end{array} \right\} =$

$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{\left(x^2 + a^2\right) - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx = x\sqrt{x^2 + a^2} -$

$- \int \frac{x^2 + a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx + a^2\, ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|$.

Отримали рівність вигляду $I = x\sqrt{x^2 + a^2} - I + a^2\, ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|$

або $2I = x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \, ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|$.

Таким чином,

$$I = \int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \, ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|\right] + C. \qquad (9)$$

Індивідуальне завдання 5

варіант 1

$I = \int (x+2)\sin 2x dx$	$I = \int \arcsin 2x dx$	$I = \int \ln x dx$
$I = \int (2x-5)e^{2x} dx$	$I = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$	$I = \int \cos x e^{2x} dx$
$I = \int (2x^2 - 5)\cos x dx$	$I = \int x arctgx \, dx$	$I = \int \ln^2 x dx$

варіант 2

$I = \int (2-x)\sin 3x dx$	$I = \int \arccos 2x dx$	$I = \int x \ln x dx$
$I = \int (3x+5)e^{3x} dx$	$I = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx$	$I = \int \sin 3x e^{2x} dx$
$I = \int (x^2 - x)\cos x dx$	$I = \int arctgx \, dx$	$I = \int \sin(\ln x) dx$

варіант 3

$I=\int(3-2x)\sin xdx$	$I=\int\arccos 3xdx$	$I=\int\frac{dx}{\cos^3 x}$
$I=\int(3x+1)e^{-x}dx$	$I=\int\ln(2x+3)dx$	$I=\int\sin xe^{-2x}dx$
$I=\int(3x^2-1)\cos 2xdx$	$I=\int xarctgx\,dx$	$I=\int\cos(\ln x)dx$

варіант 4

$I=\int x\sin(2x-1)dx$	$I=\int x\arccos xdx$	$I=\int\sqrt{x^2+1}dx$
$I=\int(x+1)e^{3-x}dx$	$I=\int\ln(1-2x)dx$	$I=\int\cos 5xe^{-x}dx$
$I=\int(x^2+1)\cos 3xdx$	$I=\int arctg\,2xdx$	$I=\int\sin(\ln 2x)dx$

варіант 5

$I=\int(1-2x)\sin 3xdx$	$I=\int x\arcsin xdx$	$I=\int\frac{dx}{\cos^3 x}$
$I=\int(7x+1)e^{4x}dx$	$I=\int\ln(4-3x)dx$	$I=\int\cos xe^{-2x}dx$
$I=\int(5-x^2)\cos xdx$	$I=\int arcctg\,3xdx$	$I=\int\cos(\ln 2x)dx$

варіант 6

$I=\int(2-x)\sin 2xdx$	$I=\int\arcsin 4xdx$	$I=\int x^2\ln xdx$
$I=\int(3x-5)e^{2x}dx$	$I=\int\frac{x}{\cos^2 3x}dx$	$I=\int\cos 5xe^{x}dx$
$I=\int x^2\cos 2xdx$	$I=\int arctgx\,dx$	$I=\int\ln^2 xdx$

варіант 7

$I=\int(x+3)\sin xdx$	$I=\int \arccos xdx$	$I=\int\sqrt{x}\ln xdx$
$I=\int(x+5)e^{-3x}dx$	$I=\int\frac{x}{\sin^2 2x}dx$	$I=\int\sin xe^{-2x}dx$
$I=\int(4-x^2)\cos 2xdx$	$I=\int xarctgx\,dx$	$I=\int\sin(\ln 9x)dx$

варіант 8

$I=\int(3-2x)\cos xdx$	$I=\int x\arccos 2xdx$	$I=\int\frac{dx}{\cos^3 2x}$
$I=\int(x+1)e^{-2x}dx$	$I=\int\ln(2-x)dx$	$I=\int\sin 5xe^{-7x}dx$
$I=\int x^2\cos 5xdx$	$I=\int arctg\,2xdx$	$I=\int\cos(\ln x^2)dx$

варіант 9

$I=\int x\cos(2x-1)dx$	$I=\int\arccos 5xdx$	$I=\int\sqrt{x^2+4}dx$
$I=\int(x+1)e^{3x}dx$	$I=\int(1-2x)\ln(1-2x)dx$	$I=\int\sin 3xe^{-x}dx$
$I=\int(x^2+1)\sin 3xdx$	$I=\int xarcctgx\,dx$	$I=\int\ln\sqrt{x}dx$

варіант 10

$I=\int(1-2x)\cos 3xdx$	$I=\int\arcsin\sqrt{x}dx$	$I=\int\ln\sqrt{2x+1}dx$
$I=\int(7-x)e^{4x}dx$	$I=\int x^3\ln xdx$	$I=\int\cos 4xe^{2x}dx$
$I=\int(5-x^2)\sin xdx$	$I=\int arctg\,5xdx$	$I=\int\sin(\ln 5x)dx$

варіант 11

$I=\int(2+x)\cos xdx$	$I=\int x\arcsin xdx$	$I=\int\sqrt{x}\ln xdx$
$I=\int(x-5)e^{5x}dx$	$I=\int\frac{x}{\cos^2 x}dx$	$I=\int\cos xe^{5x}dx$
$I=\int(x-x^2)\cos 2xdx$	$I=\int arctgx\,dx$	$I=\int\cos(\ln x^2)dx$

варіант 12

$I=\int(3x+7)\sin 2xdx$	$I=\int\arccos 8xdx$	$I=\int\sin 6xe^{-x}dx$
$I=\int(5-x)e^{-x}dx$	$I=\int\frac{\ln x}{x^2}dx$	$I=\int\frac{dx}{\cos^3 x}$
$I=\int(1-3x^2)\sin 2xdx$	$I=\int x5^x dx$	$I=\int\sin(\ln x^2)dx$

варіант 13

$I=\int(3-2x)\sin xdx$	$I=\int x\arcsin 2xdx$	$I=\int\sqrt[3]{x}\ln xdx$
$I=\int(3x+1)e^{-4x}dx$	$I=\int x^4\ln xdx$	$I=\int\cos xe^{-7x}dx$
$I=\int(4-x^2)\cos xdx$	$I=\int arctg\,5xdx$	$I=\int\sqrt{x^2+1}dx$

варіант 14

$I=\int(x+4)\cos(3x-1)dx$	$I=\int x\arccos xdx$	$I=\int\sqrt{x^2+4}dx$
$I=\int(4x+1)e^{5x}dx$	$I=\int\sqrt{1-2x}\ln(1-2x)dx$	$I=\int\cos 3xe^{-x}dx$

$I=\int(x^2+2x)\sin 3xdx$	$I=\int arcctg\,4xdx$	$I=\int\ln\sqrt[3]{x}dx$

варіант 15

$I=\int(1-2x)\cos 7xdx$	$I=\int\arccos\sqrt{x}dx$	$I=\int\ln\sqrt{2x+1}dx$
$I=\int(8-3x)e^{-x}dx$	$I=\int x^5\ln xdx$	$I=\int\cos 3xe^{-2x}dx$
$I=\int(x-4x^2)\sin xdx$	$I=\int xarctgx\,dx$	$I=\int\sin(5\ln x)dx$

варіант 16

$I=\int(2-x)\sin xdx$	$I=\int x\arcsin xdx$	$I=\int\ln^2 xdx$
$I=\int(2x-4)e^{-5x3}dx$	$I=\int\frac{x}{\cos^2 x}dx$	$I=\int\sin 3xe^{2x}dx$
$I=\int x^2\cos 3xdx$	$I=\int arctg\,7xdx$	$I=\int\sin(\ln x^2)dx$

варіант 17

$I=\int(3x+7)\cos 2xdx$	$I=\int\arccos 7xdx$	$I=\int\sqrt[3]{x}\ln xdx$
$I=\int(5-x)5^{-x}dx$	$I=\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$	$I=\int\sin xe^{-6x}dx$
$I=\int 3x^2\sin 3xdx$	$I=\int x^2e^xdx$	$I=\int\cos(\ln x^2)dx$

варіант 18

$I=\int(3+5x)\sin 7xdx$	$I=\int x\arcsin 3xdx$	$I=\int arcctg\,5xdx$
$I=\int(3x+1)7^{-4x}dx$	$I=\int(2x+3)\ln xdx$	$I=\int\cos xe^{-7x}dx$
$I=\int(1+4x^2)\cos 2xdx$	$I=\int\frac{\ln xdx}{x^2}$	$I=\int\frac{x}{\cos^2 x}dx$

варіант 19

$I=\int(1-2x)\cos 2xdx$	$I=\int\arcsin\sqrt{x}dx$	$I=\int\ln^2 xdx$
$I=\int(4+3x)6^{-x}dx$	$I=\int x^5\ln xdx$	$I=\int\sin 3x3^{2x}dx$
$I=\int(x+4x^2)\sin 3xdx$	$I=\int xarctgx\,dx$	$I=\int\sin(\ln\ x)dx$

варіант 20

$I=\int(3x+2)\sin\ xdx$	$I=\int\arcsin\ 5xdx$	$I=\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$
$I=\int(2x+1)e^{2x}dx$	$I=\int\frac{1}{\cos^3 x}dx$	$I=\int\cos\ x7^{2x}dx$
$I=\int(2x^2-1)\cos 3xdx$	$I=\int xarctgx\,dx$	$I=\int\ln^2 xdx$

§6. Інтегрування раціональних дробів

1. ***Розкладання многочлена на множники***. Всякий многочлен степеня n $Q_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ має n коренів. Це твердження називають основною теоремою алгебри. Знаючи корені α_1, α_2, ... , α_n, многочлен $Q_n(x)$ можна розкласти на множники

$$Q_n(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n). \qquad (1)$$

Деякі корені або навіть усі можуть бути комплексними, тобто вигляду $\alpha=\lambda+\mu i$, де λ та μ – дійсні числа, а i – уявна одиниця ($i^2=-1,\ i=\sqrt{-1}$). Якщо коефіцієнти многочлена $Q_n(x)$ – дійсні числа, то його комплексні корені з`являються парами: $\alpha=\lambda+\mu i$ та $\overline{\alpha}=\lambda-\mu i$. При цьому

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=[x-(\lambda+\mu i)][x-(\lambda-\mu i)]=[(x-\lambda)-\mu i][(x-\lambda)+\mu i]=$$
$$=(x-\lambda)^2+\mu^2=x^2-2\lambda x+\lambda^2+\mu^2=x^2+px+q$$
$$\left(p=-2\lambda,\quad q=\lambda^2+\mu^2\right).$$

Отже, множники в (1), що відповідають парі комплексно спряжених коренів, після перемноження дають многочлен 2-го степеня з дійсними коефіцієнтами. Якщо $Q_n(x)$ має m дійсних коренів, а решта корені комплексні, то розкладання (1) приймає вигляд

$$Q_n(x) = a_n(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_m)\left(x^2+p_1x+q_1\right)\cdots\left(x^2+p_lx+q_l\right). \quad (2)$$

Кожний множник вигляду $x-\alpha$ відповідає дійсному кореню α, а множник типу x^2+px+q відповідає парі комплексно спряжених коренів та на більш прості дійсні множники не розкладається. Якщо корені повторюються, то відповідні множники у розкладанні (2) підносять до степеня, що дорівнює кратності кореня. У загальному випадку має місце подання

$$Q_n(x) = a_n(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}\cdots\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{s_j}. \quad (3)$$

2. ***Розкладання раціонального дробу на найпростіші дроби***. Раціональний дріб являє собою відношення двох многочленів:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}. \quad (4)$$

При $m < n$ дріб називають правильним, якщо $m \geq n$, то дріб (4) неправильний. Всякий неправильний дріб діленням многочлена на многочлен можна звести до вигляду

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = H_{m-n}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_n(x)},$$

де H_{m-n} – многочлен степеня $m-n$, а $R_k(x)/Q_n(x)$ – правильний дріб.

Можна довести [3, розд.10, § 8], що всякий правильний дріб (4) із знаменником у формі (3) розкладається на найпростіші дроби так, що кожному множнику у знаменнику вигляду $(x-\alpha)^r$ відповідає сума

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(x-\alpha)^r},$$

а кожному множнику типу $\left(x^2+px+q\right)^s$ – сума

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \cdots + \frac{M_sx+N_s}{\left(x^2+px+q\right)^s},$$

де $A_1, A_2, \ldots, M_1, N_1, \ldots$ – деякі дійсні числа. Наприклад,

$$\frac{x^3+2x^2-6}{x^3(x+1)\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{B}{x+1}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Існують способи, що дозволяють у кожному конкретному випадку находити невідомі числа $A_1, A_2, \ldots, M_1, N_1, \ldots$

3. ***Метод невизначений коефіцієнтів***. Помножимо на $Q_n(x)$ обидві частини розкладання:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{(x-\alpha_1)^{r_1}}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^{s_1}}+\cdots \tag{5}$$

Після скорочення та зведення подібних маємо нову рівність. В одній її частині многочлен $P_m(x)$, в другій – многочлен з коефіцієнтами, що виражені через величини $A_1, A_2, \ldots, M_1, N_1, \ldots$ Рівність, що виникає, повинна справджуватися тотожно, тобто вона повинна бути вірною при будь-яких значеннях x. Це можливо тільки тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях x в обох її частинах збігаються. Зрівнявши коефіцієнти, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. З неї й визначаються шукані числа $A_1, A_2, \ldots, M_1, N_1, \ldots$

Приклад 1. Розкласти раціональний дріб $\dfrac{5x^3-4x^2+12x-16}{x^4-16}$ на найпростіші дроби.

Розв`язування. Даний дріб є правильним. Розкладемо знаменник на множники та запишемо загальний вигляд розкладання:

$$\frac{5x^3-4x^2+12x-16}{(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{Mx+N}{x^2+4}.$$

Звільнимося від знаменників. Після множення рівності на x^4-16 отримаємо тотожність

$$A(x+2)\left(x^2+4\right)+B(x-2)\left(x^2+4\right)+(Mx+N)\left(x^2-4\right)=5x^3-4x^2+12x-16. \tag{*}$$

Розкриємо дужки (це можна зробити усно) та зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях x зліва та справа:

при x^3 $\quad A+B+M=5,$

при x^2 $\quad 2A-2B+N=-4,$

при x $\quad 4A+4B-4M=12,$

при x^0 $\quad 8A-8B-4N=-16.$

Знайдемо: з 1-го та 3-го рівнянь: $A+B=4$, з 2-го та 4-го: $A-B=-2$. Розв`яжемо систему

$$\left.\begin{aligned} A+B&=4\\ A-B&=-2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad A=1,\, B=3, \text{ таким чином,}$$

$M=1$, $N=0$.

Отже, $$\frac{5x^3-4x^2+12x-16}{(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)}=\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+2}+\frac{x}{x^2+4}.$$

Зауваження. У вихідну тотожність, за якою складається система рівнянь з невідомими коефіцієнтами розкладання (5), можна підставляти будь-які значення x. Виникають нові рівності з тими ж невідомими. Якщо знаменник дробу з лівої частини (5) має дійсні корені, то зручно підставляти у тотожність саме ці значення. Зразу визначається якась з невідомих величин, що значно спрощує розв`язування системи або взагалі дозволяє без неї обійтися.

Так, у розглянутому вище прикладі 1, вважаючи по черзі $x=2$ та $x=-2$, за тотожністю (∗) знаходимо $32A=32$, $A=1$; $-32B=-96$, $B=3$. Для відшукування величин M та N достатньо зрівняти у (∗) коефіцієнти при яких-небудь двох степенях x, наприклад, самого високого та самого низького або, що те саме, вибрати з вже складеної раніше системи першу та останню рів-ності. При відомих значеннях A та B їх розв`язування не буде складним.

4. ***Інтегрування найпростіших дробів***. У результаті розкладання правильного раціонального дробу можуть з`явитися найпростіші дроби чотирьох типів:

$$\frac{A}{x-\alpha};\quad \frac{A}{(x-\alpha)^k}\ (k>1);\quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q};\quad \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}\ (k>1).$$

Інтеграли від перших двох функцій є табличними:

$$\int\frac{A}{x-\alpha}dx=A\,ln|x-\alpha|+C;$$

$$\int\frac{A}{(x-\alpha)^k}dx=A\int(x-\alpha)^{-k}d(x-\alpha)=A\frac{(x-\alpha)^{1-k}}{1-k}+C.$$

Інтегрування дробу третього типу розглянуто в 2^0 § 35.

Інтеграл $I=\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx$, де $q > p^2/4$, знаходимо тим самим прийомом, що й в 2^0 § 35: у чисельнику дробу формуємо диференціал функції $u = x^2 + px + q$, після цього підінтегральний вираз розбиваємо на два доданки: перший дає табличний інтеграл вигляду $\int du/u^k$, другий приводить до інтегралу

$$I=\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}=\int\frac{dx}{\left[(x+p/2)^2+q-p^2/4\right]^k}=\left\{\begin{array}{l} t=x+p/2, \\ dt=dx, \\ a^2=q-p^2/4 \end{array}\right\}=$$

$=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$. Останній інтеграл можна знайти за так званою рекурентною формулою (*recurrence* – повторення, повернення, англ.):

$$I=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{a^2(2k-2)}\left[\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}+(2k-3)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}\right]. \quad (6)$$

Завдяки формулі (6) на одиницю знижується степінь знаменника підінтегральної функції. Формулу застосовують k–1 разів, після чого інтеграл зводиться до табличного виду.

Справедливість рівності (6) встановлюється за допомогою елементарних перетворювань і формули інтегрування частинами (35.8):

$$I=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\left(t^2+a^2\right)-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{t\cdot t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l|l} u=t & du=dt \\ dv=\dfrac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k} & v=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{2}\,\frac{\left(t^2+a^2\right)^{1-k}}{1-k} \end{array}\right\}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}-$$

$$-\frac{1}{a^2}\left[\frac{t}{2(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{2-2k}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}\right]$$, що й дає праву частину (6).

Приклад 2. $I=\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}=\left\{\begin{matrix}\text{застосуємо формулу } (6),\\ \text{де } k=3,\ a^2=1\end{matrix}\right\}=$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}+3\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}\right]=\left\{\begin{matrix}\text{застосуємо формулу } (6),\\ \text{де } k=2,\ a^2=1\end{matrix}\right\}=\frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2}+$$

$$+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{x}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}\right]=\frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3}{8}\left(\frac{x}{x^2+1}+arctgx\right)+C.$$

5. ***Інтегрування довільного раціонального дробу***. Будь-який раціональний дріб за описаною вище методикою розкладається на найпростіші дроби і потім інтегрується.

Приклад 3. Знайти інтеграл $I=\int\frac{2x^4-5x^3-x^2+3x-11}{\left(x^2-1\right)(x-3)}dx$.

Розв`язування. Функція, що стоїть під знаком інтеграла, представляє собою неправильний раціональний дріб, його чисельником є многочлен 4-го степеня, а знаменником − многочлен 3-го степеня. Діленням першого многочлена на другий виділимо з дробу цілу частину:

$$\frac{2x^4-5x^3-x^2+3x-11}{x^3-3x^2-x+3}=2x+1+\frac{4x^2-2x-14}{x^3-3x^2-x+3}=2x+1+\frac{4x^2-2x-14}{(x-1)(x+1)(x-3)}.$$

Останній дріб вже правильний. Знайдемо його розкладання на найпростіші дроби:

$$\frac{4x^2-2x-14}{(x-1)(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{D}{x-3}.$$

Позбавившись від знаменників, одержимо тотожність

$$A(x+1)(x-3)+B(x-1)(x-3)+D(x-1)(x+1)=4x^2-2x-14. \qquad (*)$$

Знаменник вихідного дробу має дійсні корені $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$. Підставимо по черзі ці значення у (*). Маємо: при $x = 1$ $-4A = -12$, $A = 3$; при $x = -1$ $8B = -8$, $B = -1$; при $x = 3$ $8D = 16$, $D = 2$. Отже,

$$I = \int \left[2x + 1 + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-3} \right] dx = x^2 + x + 3\,ln|x-1| - ln|x+1| + 2\,ln|x-3| + C =$$

$$= x^2 + x + ln\left| \frac{(x-1)^3 (x-3)^2}{x+1} \right| + C\,.$$

Приклад 4. Знайти $I = \int \frac{x\,dx}{x^3 - 8}$.

Розв`язування. Раціональний дріб $x/\left(x^3 - 8\right)$ є правильним. Розкладемо знаменник на множники, а дріб – на найпростіші дроби:

$$\frac{x}{x^3 - 8} = \frac{x}{(x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + D}{x^2 + 2x + 4}\,.$$

Помноживши рівність на $x^3 - 8$, прийдемо до тотожності

$$A\left(x^2 + 2x + 4\right) + (Bx + D)(x - 2) \equiv x\,. \qquad (*)$$

При $x = 2$ маємо 12A = 2, A = 1/6. Інших зручних значень для x тут немає. Зрівняємо в (*) коефіцієнти при x^2 та x^0. Отримаємо

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 4A - 2D &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad B = -A = -1/6, \quad D = 2A = 1/3\,.$$

Таким чином, $I = \int \left[\frac{1/6}{x-2} + \frac{-1/6\,x + 1/3}{x^2 + 2x + 4} \right] dx = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{6} \int \frac{x-2}{x^2 + 2x + 4}\,dx =$

$$= \frac{1}{6}\,ln|x-2| - \frac{1}{6} \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) - 3}{x^2 + 2x + 4}\,dx = \frac{1}{6}\,ln|x-2| - \frac{1}{12} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 4}\,dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 3} =$$

$$= \frac{1}{6} ln\left|x-2\right| - \frac{1}{12} ln\left|x^2 + 2x + 4\right| + \frac{1}{2\sqrt{3}} arctg \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Індивідуальне завдання 6

варіант 1

$I = \int \frac{2x^4 + 2x^3 - 41x^2 + 20dx}{x(x+5)(x-4)}$	$I = \int \frac{(2x^3 + 2x + 1)dx}{(x^2 - x + 1)(x^{2+1})}$	$I = \int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2 (x^2 + x + 1)} dx$
$I = \int \frac{(x^3 + 6x^2 + 15x + 2)dx}{(x-2)(x+2)^3}$	$I = \int \frac{(x^3 + 1)dx}{(x^2 - x)}$	$I = \int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^3} dx$

варіант 2

$I = \int \frac{(3x^3 + 1)dx}{(x^2 - 1)}$	$I = \int \frac{(x^3 + 4x^2 + 2x + 2)dx}{(x+1)^2 (x^2 + 1)}$	$I = \int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 4}{(x+2)(x-2)^3} dx$
$I = \int \frac{(x^3 + 6x^2 + 13x + 8)dx}{x(x+5)^3}$	$I = \int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2)dx}{x(x-1)(x+2)}$	$I = \int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx$

варіант 3

$I = \int \frac{(4x^4 + 2x^2 - x - 3)dx}{x(x-1)(x+1)}$	$I = \int \frac{(x^3 + 6x^2 + 10x + 12)dx}{(x-2)(x+2)^3}$	$I = \int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 10}{(x-2)^3 (x+2)} dx$
$I = \int \frac{(x^3 + x^2 + 1)dx}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)}$	$I = \int \frac{(x^3 - 17)dx}{x^2 - 4x + 3}$	$I = \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x - 1}{(x+2)^2 (x^2 + x + 1)} dx$

варіант 4

$I = \int \frac{(x^2 + 1)dx}{(x-1)^3 (x+3)}$	$I = \int \frac{(x+4)dx}{(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)}$	$I = \int \frac{(2x+1)dx}{(x+1)(x-1)(x+2)}$
$I = \int \frac{(x+1)dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}$	$I = \int \frac{(2x^2 - x + 1)dx}{(x-2)^2 (x^2 + 1)}$	$I = \int \frac{(x^3 + x + 1)dx}{(x^4 - 81)}$

варіант 5

$I = \int \frac{dx}{x^5 - x^2}$	$I = \int \frac{x^2 dx}{(x-1)^5}$	$I = \int \frac{(3x+1)dx}{(x+1)(x-3)(x+2)}$

$I=\int\frac{(x^3+3x^2+5x+7)dx}{(x^2+2)}$	$I=\int\frac{(3x^3+x^2+5x+1)dx}{(x^3+x)}$	$I=\int\frac{dx}{(x^2+2x+10)(x-2)}$

варіант 6

$I=\int\frac{(x^2+1)dx}{(x-1)^3(x+3)}$	$I=\int\frac{(x^5+1)dx}{(x^4-8x^2+16)}$	$I=\int\frac{(x+2)dx}{(x^4+16x^2)}$
$I=\int\frac{(x^3-2x)dx}{(x^2+1)^2}$	$I=\int\frac{dx}{(x^2-2x)^2}$	$I=\int\frac{x^4dx}{(x^4-16)}$

варіант 7

$I=\int\frac{(2x^3+5)dx}{(x^2-x-2)}$	$I=\int\frac{(2x^3+4x^2+2x-1)dx}{(x^2+2x+2)(x+1)^2}$	$I=\int\frac{(x^3+6x^2+18x-4)dx}{(x-2)(x+2)^3}$
$I=\int\frac{(x^3+6x^2+14x+10x)dx}{(x+1)(x+2)^3}$	$I=\int\frac{(2x^4-5x^2-8x-8)dx}{x(x^2-4)}$	$I=\int\frac{(2x^2-x+1)dx}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$

варіант 8

$I=\int\frac{(2x^3-1)dx}{(x^2+x-6)}$	$I=\int\frac{(2x^3+6x^2+9x+6)dx}{(x^2+2x+2)(x+1)^2}$	$I=\int\frac{(x^3+6x^2+14x+4)dx}{(x-2)(x+2)^3}$
$I=\int\frac{(x^3-6x^2+11x+10x)dx}{(x+2)(x-2)^3}$	$I=\int\frac{(8-7x)dx}{(x-4)(x-2)(x+1)}$	$I=\int\frac{(3x^3+4x^2+6x)dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2)}$

варіант 9

$I=\int\frac{(x^3-5x^2+5x+23)dx}{(x-1)(x+1)(x-5)}$	$I=\int\frac{(4x^2+3x+4)dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$	$I=\int\frac{(x^3+6x^2+11x+7)dx}{(x+1)(x+2)^3}$

$I=\int\frac{(x^3+6x^2+4x+24)dx}{(x-2)(x+2)^3}$	$I=\int\frac{(3x^2+25)dx}{(x^2+3x+2)}$	$I=\int\frac{(2x^3+11x^2+16x+10)dx}{(x^2+2x+3)(x+2)^2}$

варіант 10

$I=\int\frac{(x^3+2x^2+3)dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$	$I=\int\frac{(3x^3+6x^2+5x-1)dx}{(x+1)^2(x^2+2)}$	$I=\int\frac{(2x^3+6x^2+5x+4)dx}{(x-2)(x+1)^3}$
$I=\int\frac{(2x^3+6x^2+7x+1)dx}{(x-1)(x+1)^3}$	$I=\int\frac{(-x^5+25x^3+1)dx}{(x^2+5x)}$	$I=\int\frac{(2x^3+7x^2+7x+9)dx}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}$

варіант 11

$I=\int\frac{(3x^3+2x^2+1)dx}{(x+2)(x-2)(x-1)}$	$I=\int\frac{(x^3+9x^2+21x)dx}{(x+3)^2(x^2+3)}$	$I=\int\frac{(2x^3+6x^2+7x)dx}{(x-2)(x+1)^3}$
$I=\int\frac{(x^3+6x^2+10x+10)dx}{(x-1)(x+2)^3}$	$I=\int\frac{(-x^5+9x^3+4)dx}{(x^2+3x)}$	$I=\int\frac{(2x^3+4x^2+2x+2)dx}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}$

варіант 12

$I=\int\frac{x^3dx}{(x+1)(x+2)(x-1)}$	$I=\int\frac{(x^3+6x^2+8x+8)dx}{(x+2)^2(x^2+4)}$	$I=\int\frac{(2x^3+6x^2+5x)dx}{(x+2)(x+1)^3}$
$I=\int\frac{(2x^3+6x^2+7x+2)dx}{x(x+1)^3}$	$I=\int\frac{(3x^5-12x^3-7)dx}{(x^2+2x)}$	$I=\int\frac{(x^2+x+3)dx}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$

варіант 13

$I=\int\frac{(x^3-3x^2-12)dx}{(x-4)(x-3)(x-2)}$	$I=\int\frac{(x^3+5x^2+12x+4)dx}{(x+2)^2(x^2+4)}$	$I=\int\frac{(2x^3+6x^2+7x+4)dx}{(x+2)(x+1)^3}$
$I=\int\frac{(x^3-6x^2+13x-8)dx}{x(x-2)^3}$	$I=\int\frac{(2x^5-8x^3+3)dx}{(x^2-2x)}$	$I=\int\frac{(x^3+x+1)dx}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$

варіант 14

$I=\int\frac{(x^3-3x^2-12)dx}{x(x-4)(x-3)}$	$I=\int\frac{(2x^3-4x^2-16x-12)dx}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}$	$I=\int\frac{(2x^3+x+1)dx}{(x+1)x^3}$
$I=\int\frac{(x^3-6x^2+13x-7)dx}{(x+1)(x-2)^3}$	$I=\int\frac{(x^5+3x^3-1)dx}{(x^2+x)}$	$I=\int\frac{(2x^3+3x^2+3x+2)dx}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$

варіант 15

$I=\int\frac{(3x^3+9x^2+10x+2)dx}{(x-1)(x+1)^3}$	$I=\int\frac{(-3x^3+13x^2-13x+1)dx}{(x-2)^2(x^2-x+1)}$	$I=\int\frac{(4x^3+x^2+2)dx}{x(x-1)(x-2)}$
$I=\int\frac{(x^3-6x^2+14x+6)dx}{(x+1)(x-2)^3}$	$I=\int\frac{(4x^3+24x^2+20x-28)dx}{(x^2+2x+2)(x+3)^2}$	$I=\int\frac{(x^5-x^3+1)dx}{(x^2-x)}$

варіант 16

$I=\int\frac{(3x^3-2)dx}{(x^3-x)}$	$I=\int\frac{(x^3+2x^2+10x)dx}{(x+1)^2(x^2-x+1)}$	$I=\int\frac{(x^3+x+2)dx}{(x+2)x^3}$
$I=\int\frac{(x^3-6x^2+10x+10)dx}{(x+1)(x-2)^3}$	$I=\int\frac{(x^3-3x^2-12)dx}{x(x-4)(x-2)}$	$I=\int\frac{(3x^3+x+46)dx}{(x^2+9)(x-1)^2}$

варіант 17

$I=\int\frac{2x^4+2x^3-41x^2+20dx}{x(x+5)(x-4)}$	$I=\int\frac{(x^3+6x^2+10x+12)dx}{(x-2)(x+2)^3}$	$I=\int\frac{(3x+1)dx}{(x+1)(x-3)(x+2)}$
$I=\int\frac{(x^3+6x^2+13x+8)dx}{x(x+5)^3}$	$I=\int\frac{(2x^2-x+1)dx}{(x-2)^2(x^2+1)}$	$I=\int\frac{x^4dx}{(x^4-16)}$

варіант 18

$I=\int\frac{(2x^3+5)dx}{(x^2-x-2)}$	$I=\int\frac{(4x^2+3x+4)dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$	$I=\int\frac{(2x^3+6x^2+7x)dx}{(x-2)(x+1)^3}$
$I=\int\frac{(x^3-6x^2+11x+10x)dx}{(x+2)(x-2)^3}$	$I=\int\frac{(-x^5+25x^3+1)dx}{(x^2+5x)}$	$I=\int\frac{(x^2+x+3)dx}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$

варіант 19

$I=\int\frac{(x^3-3x^2-12)dx}{(x-4)(x-3)(x-2)}$	$I=\int\frac{(-3x^3+13x^2-13x+1)dx}{(x-2)^2(x^2-x+1)}$	$I=\int\frac{(3x+1)dx}{(x+1)(x-3)(x+2)}$
$I=\int\frac{(x^3-6x^2+13x-7)dx}{(x+1)(x-2)^3}$	$I=\int\frac{(x^3-3x^2-12)dx}{x(x-4)(x-2)}$	$I=\int\frac{(2x^2-x+1)dx}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$

варіант 20

$I=\int\frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx$	$I=\int\frac{(2x^2-x+1)dx}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$	$I=\int\frac{(x^5+1)dx}{(x^4-8x^2+16)}$
$I=\int\frac{(x^3+x^2+1)dx}{(x^2-x+1)(x^2+1)}$	$I=\int\frac{(3x^3+x^2+5x+1)dx}{(x^3+x)}$	$I=\int\frac{(3x^3+4x^2+6x)dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2)}$

§ 7. Інтегрування деяких ірраціональних та трансцендентних функцій

У даному параграфі позначення $R(u,v,\ldots,w)$ вказує на те, що над величинами *u*, *v*, ..., *w* проводяться лише раціональні алгебраїчні операції, тобто дії додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до цілого степеня. Наприклад, функцію $f(x)=(x+1)\Big/\left(1+\sqrt{(2x+1)^3}\right)$ слід віднести до типу $R\left(x,\sqrt{2x+1}\right)$, а функцію $f(x)=\left(e^x+1\right)\Big/\left(e^{2x}+4\right)$ – до типу $R\left(e^x\right)$.

При інтегруванні ірраціональностей, якщо інтеграл не табличний, задача, як правило, полягає в тому, щоб за допомогою підходящої підстановки раціоналізувати підінтегральний вираз. В окремих випадках це вдається.

1. ***Інтеграли вигляду*** $I=\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$. (1)

Тут *n* – натуральне число, *a, b, c, d* – дійсні числа, $ad\neq bc$. До раціо-нального підінтегрального виразу приводить підстановка

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n. \qquad (2)$$

Справді, $ax+b=cxt^n+t^n d$, $x=\dfrac{b-t^n d}{ct^n-a}$, $dx=\dfrac{nt^{n-1}(ad-bc)}{\left(ct^n-a\right)^2}dt$.

Вносячи ці вирази в (1), отримаємо

$$I=\int R\left(\frac{b-t^n d}{ct^n-a},t\right)\frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{\left(ct^n-a\right)^2}dt.$$

Під знаком інтеграла утворилась раціональна функція аргументу t – у загальному випадку раціональний дріб, який інтегрується за вже відомими правилами.

Приклад 1. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{1+\sqrt{x-1}}=\left\{\begin{matrix}x-1=t^2,\ x=t^2+1\\ dx=2tdt,\ t=\sqrt{x-1}\end{matrix}\right\}=\int\frac{\left(t^2+1\right)2t\,dt}{1+t}=$

$$=2\int\frac{t^3+t}{t+1}dt=2\int\left(t^2-t+2-\frac{2}{t+1}\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+2t-2\,ln|t+1|\right)+C=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}-(x-1)+4\sqrt{x-1}-4\,ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)+C.$$

Приклад 2. $\displaystyle I=\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx=\left\{\begin{matrix}\dfrac{x+1}{x}=t^2,\ x=\dfrac{1}{t^2-1}\\ dx=-\dfrac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2},\ t=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}\end{matrix}\right\}=$

$$=-\int\left(t^2-1\right)^2 t\frac{2t\,dt}{\left(t^2-1\right)^2}=-2\int t^2\,dt=-\frac{2}{3}t^3+C=-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}+C.$$

Тут можливе й безпосереднє інтегрування:

$$I=-\int\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}d\left(1+\frac{1}{x}\right)=-\frac{(1+1/x)^{3/2}}{3/2}+C=-\frac{2}{3}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}+C.$$

Зауваження. У більш загальному випадку

$$\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ldots\right)dx$$

раціоналізація досягається підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, де k – найменше загальне кратне чисел $m, n, ...$

Приклад 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = \left\{ \begin{matrix} x+1=t^6, \ x=t^6-1 \\ dx=6t^5dt, \ t=\sqrt[6]{x+1} \end{matrix} \right\} = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} =$

$$= 6\int \frac{t^3\,dt}{t+1} = 6\int \frac{\left(t^3+1\right)-1}{t+1}dt = 6\int \left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1} \right)dt = 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-ln|t+1| \right)+C =$$

$$= 2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-6\,ln\left(1+\sqrt[6]{x+1}\right)+C\,.$$

2⁰. ***Інтеграли вигляду*** $I=\int R\left(x, \sqrt{bx^2+cx+g}\right)dx \quad (b \neq 0)$. (3)

Через виділення під коренем повного квадрата інтеграл зводиться до одного з таких типів:

$$а)\int R\left(u, \sqrt{a^2-u^2}\right)du;\ б)\int R\left(u, \sqrt{a^2+u^2}\right)du;\ в)\int R\left(u, \sqrt{u^2-a^2}\right)du. \quad (4)$$

Раціоналізація тепер можлива за допомогою тригонометричних підстановок:

$$а)\ u=a\,sin\,t, \quad du=a\,cos\,t\,dt; \qquad б)\ u=a\,tg\,t, \quad du=a\,sec^2\,t\,dt;$$
$$в)\ u=a\,sec\,t, \quad du=a\,sec\,t\ tg\,t\,dt\,. \qquad (5)$$

Приклад 4. $\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-(x-1)^2}\,dx = \{x-1=2\,sin\,t,$

$dx=2\,cos\,t\,dt,\ t=arcsin\,\frac{x-1}{2}\} = \int \sqrt{4-4\,sin^2\,t}\ \cdot 2\,cos\,t\,dt = 4\int cos^2\,t\,dt =$

$$= 2\int (1+cos\,2t)dt = 2\left(t+\frac{1}{2}sin\,2t \right)+C = 2t+2\,sin\,t\cdot\sqrt{1-sin^2\,t}+C =$$

$$= 2\,arcsin\,\frac{x-1}{2}+(x-1)\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}+C.$$

Приклад 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(2+x^2\right)^3}} = \left\{ \begin{matrix} x=\sqrt{2}tgt,\ t=arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \\ dx=\sqrt{2}sec^2\,tdt \end{matrix} \right\} = \int \frac{\sqrt{2}sec^2\,tdt}{\sqrt{\left(2+2tg^2t\right)^3}} =$

$$= \left\{ 1 + tg^2 t = sec^2 t,\ \ sec\, t = \frac{1}{cos\, t} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{sec^2 t}{sec^3 t} dt = \frac{1}{2}\int cos\, t\, dt = \frac{1}{2} sin\, t + C =$$

$$= \frac{1}{2} sin\left(arctg \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + C\,.$$

Зауваження. До вигляду (3) належить, зокрема, інтеграл

$$I = \int \frac{dx}{(x - \alpha)\sqrt{bx^2 + cx + g}}\,. \qquad (6)$$

У цьому випадку до цілі швидше веде підстановка, яку називають інверсією:

$$x - \alpha = \frac{1}{t}. \qquad (7)$$

Приклад 6. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \left\{ \begin{array}{l} x - 1 = 1/t\,,\ dx = -dt/t^2 \\ t = 1/(x-1) \end{array} \right\} =$

$$= \int \frac{-1/t^2\, dt}{1/t\,\sqrt{1/t^2 + 1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = -\,ln\left| t + \sqrt{t^2 + 1} \right| + C = -\,ln\left| \frac{1}{x-1} + \sqrt{\frac{1}{(x-1)^2} + 1} \right| + C\,.$$

4. ***Універсальна тригонометрична підстановка***. Так називають заміну

$$t = tg\frac{x}{2}, \qquad (8)$$

за допомогою якої інтеграл вигляду $I = \int R(sin\, x,\, cos\, x)dx$ на проміжку $(-\pi, \pi)$ перетворюється на інтеграл від раціональної алгебраїчної функції аргументу *t*. Щоб це показати, виразимо $sin\, x$, $cos\, x$ та *dx* через нову змінну *t*. Дістанемо

$$sin\, x = 2\, sin\frac{x}{2} cos\frac{x}{2} = 2tg\frac{x}{2} cos^2\frac{x}{2} = \frac{2tg(x/2)}{sec^2(x/2)} = \frac{2tg(x/2)}{1 + tg^2(x/2)} = \frac{2t}{1 + t^2}\,,$$

$$cos\,x = cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2} = cos^2\frac{x}{2}\left(1 - tg^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - tg^2(x/2)}{sec^2(x/2)} = \frac{1 - tg^2(x/2)}{1 + tg^2(x/2)} =$$

$$= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

В інтеграл I вносимо вирази

$$sin\,x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad cos\,x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}. \tag{9}$$

Маємо $I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$. Під знаком *R* знаходяться раціональні дроби, над ними виконуються раціональні алгебраїчні операції. В результаті може вийти лише раціональна алгебраїчна функція. Інтегрування такої функції було розглянуто раніше.

Приклад 9. $$\int \frac{dx}{2\,sin\,x - cos\,x} = \left\{\begin{matrix} t = tg\frac{x}{2}, & sin\,x = \frac{2t}{1+t^2}, \\ cos\,x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, & dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 4t - 1} = 2\int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2 - 5} = \frac{1}{\sqrt{5}}ln\left|\frac{t + 2 - \sqrt{5}}{t + 2 + \sqrt{5}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}ln\left|\frac{tg\frac{x}{2} + 2 - \sqrt{5}}{tg\frac{x}{2} + 2 + \sqrt{5}}\right| + C.$$

В інтегралі типу $I = \int R\left(sin^2 x, cos^2 x, tgx\right)dx$ окрім (11) до раціонального алгебраїчного виразу, причому більш простого, веде підстановка

$$t = tgx. \tag{10}$$

В цьому випадку $sin^2 x = tg^2 x\,cos^2 x = \frac{tg^2 x}{sec^2 x} = \frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x}$,

$$cos^2 x = \frac{1}{sec^2 x} = \frac{1}{1+tg^2 x},\; x = arctgt.$$ Таким чином,

$$tgx = t, \quad sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\; dx = \frac{dt}{1+t^2}. \qquad (11)$$

Інтеграл I приймає вигляд:

$I = \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, t\right)\frac{dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt$, де $R_1(t)$ – раціональна функція аргументу t.

Приклад 10. $$\int \frac{dx}{2-sin^2 x} = \left\{t = tgx, \quad sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}\right\} =$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2-\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

5. ***Інтеграли вигляду*** $I = \int R\left(e^x\right)dx$. За допомогою підстановки

$$t = e^x \qquad (12)$$

тут можна прийти до інтегрування раціональної алгебраїчної функції $\frac{R(t)}{t}$.

Дійсно, $t = e^x$, $x = ln\,t$, $dx = \frac{dt}{t}$ та $I = \int R(t)\frac{dt}{t}$.

Приклад 11. $$\int \frac{e^{3x}dx}{e^{2x}+1} = \left\{t = e^x, \quad dx = \frac{dt}{t}\right\} = \int \frac{t^3}{t^2+1}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{t^2}{t^2+1}dt =$$

$$= \int \frac{\left(t^2+1\right)-1}{t^2+1}dt = \int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = t - arctgt + C = e^x - arctg\left(e^x\right) + C.$$

Індивідуальне завдання 7

варіант 1

$I=\int\frac{(2x+3)dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x+3}}$	$I=\int\sqrt{4-x^2}dx$	$I=\int\frac{dx}{3\sin^2 x-4\cos^2 x}$
$I=\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$	$I=\int\frac{(\cos x-\sin x)dx}{(1+\sin x)^2}$	$I=\int\frac{2e^{2x}+7e^x}{e^{2x}+e^x-2}dx$

варіант 2

$I=\int\frac{(1-x)dx}{x\sqrt{3x+2}}$	$I=\int x^2\sqrt{9-x^2}dx$	$I=\int\frac{\sin^2 xdx}{1+\cos^2 x}$
$I=\int\frac{(x-1)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$	$I=\int\frac{\cos xdx}{(1-\sin x)(1+\cos x)}$	$I=\int\frac{2e^{2x}-4e^x}{(e^x-2)(e^x-3)}dx$

варіант 3

$I=\int\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x})dx}{\sqrt[3]{1+x}+4}$	$I=\int\frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$	$I=\int\frac{dx}{2\sin^2 x+9\cos^2 x}$
$I=\int\frac{(x-1)dx}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}$	$I=\int\frac{\cos xdx}{(1-\sin x+\cos x)^2}$	$I=\int\frac{3e^{2x}+2e^x-3}{(e^{2x}-1)}dx$

варіант 4

$I=\int\frac{xdx}{1+\sqrt[3]{4x+1}}$	$I=\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$	$I=\int\frac{dx}{1+4\cos^2 x}$
$I=\int\frac{(x-1)dx}{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}}$	$I=\int\frac{\sin xdx}{(1-\sin x+\cos x)^2}$	$I=\int\frac{e^x+2}{(e^{2x}-2e^x)}dx$

варіант 5

$I=\int x\sqrt{5x-1}dx$	$I=\int x^2\sqrt{16-x^2}dx$	$I=\int\frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$
$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{3x^2+x+1}}$	$I=\int\frac{\cos xdx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$	$I=\int\frac{5e^{2x}-e^x}{(e^{3x}-3e^x-2)}dx$

варіант 6

$I=\int\frac{3x+4}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}dx$	$I=\int\frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}dx$	$I=\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$

$I=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$	$I=\int\frac{\sin x dx}{(1+\sin x)^2}$	$I=\int\frac{2e^{2x}-5e^x+1}{(e^{2x}-2e^x+1)}dx$

варіант 7

$I=\int\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}dx$	$I=\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$	$I=\int\frac{dx}{2+\cos^2 x}$
$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^2+6x-1}}$	$I=\int\frac{dx}{(5-3\cos x)}$	$I=\int\frac{5e^{2x}+2e^x}{(e^{2x}+2e^x+10)}dx$

варіант 8

$I=\int\frac{x+2}{x\sqrt{x-1}}dx$	$I=\int\frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)}}dx$	$I=\int\frac{dx}{1+2\cos^2 x+3\sin^2 x}$
$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-1}}$	$I=\int\frac{(1+\sin x)dx}{(1-\sin x)^2}$	$I=\int\frac{7e^x-15}{(e^{2x}-2e^x+5)}dx$

варіант 9

$I=\int\frac{x}{\sqrt{2x-1}+\sqrt[4]{2x-1}}dx$	$I=\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$	$I=\int\frac{tgx dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x-3}$
$I=\int\frac{(2x+3)dx}{x\sqrt{6x-x^2}}$	$I=\int\frac{dx}{(5+4\sin x)}$	$I=\int\frac{2e^x}{(e^{3x}+8)}dx$

варіант 10

$I=\int\frac{\sqrt{3x+1}}{1+\sqrt[4]{3x+1}}dx$	$I=\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$	$I=\int\frac{dx}{3-\sin^2 x}$
$I=\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+5}}$	$I=\int\frac{dx}{(3+\cos x+2\sin x)}$	$I=\int\frac{e^x}{(e^x+1)(e^x-3)}dx$

варіант 11

$I=\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$	$I=\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$	$I=\int\frac{tgxdx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x-1}$
$I=\int\frac{(x+2)dx}{x\sqrt{3-x^2}}$	$I=\int\frac{dx}{(8+7\cos x-4\sin x)}$	$I=\int\frac{e^x}{(e^{4x}-1)}dx$

варіант 12

$I=\int\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx$	$I=\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$I=\int\frac{(1+tgx)dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$
$I=\int\frac{(x-1)dx}{x\sqrt{2x^2-1}}$	$I=\int\frac{dx}{(3+\cos x-2\sin x)}$	$I=\int\frac{1}{(e^{3x}+3e^x)}dx$

варіант 13

$I=\int\frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}dx$	$I=\int\frac{1}{\sqrt{(25+x^2)^3}}dx$	$I=\int\frac{(2-ctgx)dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x}$
$I=\int\frac{(x-1)dx}{x\sqrt{4x^2+2x+1}}$	$I=\int\frac{dx}{(2+3\cos x)}$	$I=\int\frac{1}{(e^x+5)}dx$

варіант 14

$I=\int\frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}dx$	$I=\int\frac{x^2}{\sqrt{(4+x^2)^5}}dx$	$I=\int\frac{dx}{\sin^2 x+5\cos^2 x}$
$I=\int\frac{(x-1)dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+8}}$	$I=\int\frac{\sin xdx}{(2+\sin x)}$	$I=\int\frac{e^x}{(e^{3x}-8)}dx$

варіант 15

$I=\int\frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt[3]{2x+3}}dx$	$I=\int\frac{1}{\sqrt{(2+x^2)^3}}dx$	$I=\int\frac{dx}{2\sin^2 x+\cos^2 x+3}$
$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$	$I=\int\frac{\sin xdx}{(5+3\sin x)}$	$I=\int\frac{e^x}{(e^{3x}+e^{2x}+2e^x+2)}dx$

варіант 16

$I=\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+1}dx$	$I=\int x^2\sqrt{16-x^2}dx$	$I=\int\frac{(1+2tgx)dx}{\cos^2 x+1}$
$I=\int\frac{(2x+5)dx}{x\sqrt{4x-x^2-1}}$	$I=\int\frac{\cos xdx}{(1+\sin x-\cos x)}$	$I=\int\frac{e^x-5}{(e^{2x}+25)}dx$

варіант 17

$I=\int\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}dx$	$I=\int\frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$	$I=\int\frac{(2tg^2x-11tgx-22)dx}{4-tgx}$
$I=\int\frac{(x-2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$	$I=\int\frac{\cos xdx}{(5+4\cos x)}$	$I=\int\frac{1}{(e^{3x}+e^x)}dx$

варіант 18

$I=\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}dx$	$I=\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$	$I=\int\frac{(4tgx-5)dx}{1-\sin^2 x+4\cos^2 x}$
$I=\int\frac{(2x+1)dx}{x\sqrt{9x-x^2}}$	$I=\int\frac{\cos xdx}{(2+\cos x)}$	$I=\int\frac{1}{(e^{3x}-e^x)}dx$

варіант 19

$I=\int\frac{1}{\sqrt{3x+1}+1}dx$	$I=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$	$I=\int\frac{(6+tgx)dx}{9\sin^2 x+4\cos^2 x}$
$I=\int\frac{(4x+1)dx}{x\sqrt{x^2-6x+1}}$	$I=\int\frac{dx}{(3+3\cos x+5\sin x)}$	$I=\int\frac{e^x}{(e^{2x}-3)(e^{2x}+2)}dx$

варіант 20

$I=\int\sqrt{\frac{x}{4-x}}dx$	$I=\int\frac{\sqrt{x^2-1}dx}{x^4}$	$I=\int\frac{(\sin^2 x)dx}{3\cos^2 x-4}$
$I=\int\frac{(3x+1)dx}{x\sqrt{2x+x^2}}$	$I=\int\frac{\cos xdx}{(2+\cos x)}$	$I=\int\frac{1}{(e^x-2)}dx$

Список літератури

1. Є.С. Сінайський, Л.В. *Новікова, Л.І. Заславська Вища математика Дніпропетровськ. НГУ. 2004 (частина 1)*
2. Геворкян Ю.Л. Теорія границь і диференціальне числення функцій однієї змінної: навч. посібник.- К.: ІСДО, 1993.-124 с.
3. Олексенко В. М. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: підручник. – Харків: НТУ «ХПІ», 2000 – 372 с.
4. Вища математика в прикладах і задачах: у 2 т. Т.1: Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної: навч. посібник / Л.В.Курпа, Ж.Б.Кашуба, Г.Б.Лінник [та ін.]; за ред. Л.В.Курпи. – Харків: НТУ «ХПІ», 2009. – 532с.
5. Вища математика. Розв’язання задач та варіанти типових розрахунків. Т.1.: Навч. Посібник / За ред. Л.В.Курпа. — Харків: НТУ “ХПІ”, 2002 – 316с.
6. Тестові завдання за темою «Диференціювання функції однієї змінної». / упоряди.: Сушко С.О., Сточай В.Ф., Фомичова Л.Я. – Дніпропетровськ: Національний Гірничий університет, 2006. – 70 с.
7. Практикум з початків математичного аналізу: Навчальний посібник./ Новикова Л.В., Уланова Н.П., Приходько В.В. – Дніпропетровськ: НГУ, 2006. – 109 с.
8. Математика 1. Конспект лекцій. Частина 1. / Л.Я.Фомичова– Дніпро: ТОВ «Лізунов Прес», 2017. – 72 с.
9. Практикум з початків математичного аналізу: навч. посібник / Новикова Л.В., Уланова Н.П., Приходько В.В. – Дніпропетровськ: НГУ, 2006. – 109 с.

Навчальне видання

Сдвижкова Олена Олександрівна
Бабець Дмитро Володимирович
Тимченко Світлана Євгенівна
Шпорта Анна Григорівна

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ.

Методичні рекомендації до практичних занять
з дисципліни «Математичний аналіз» для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 113 «Прикладна математика»

В авторській редакції

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро просп. Дмитра Яворницького , 19